

DNS 모형을 통한 금리 충격 시나리오 산출 및 분석*

The Generation and Analysis of the Interest Rate Shock Scenarios Using DNS Model

태 현 옥**·노 건 업***·김 병 준****·장 봉 규*****·박 경 국*****

Hyeon-Wuk Tae·Geonyoup Noh·Byung-June Kim·Bong-Gyu Jang·Kyoung Gook Park

본 연구는 DNS 모형을 바탕으로 금리 충격 시나리오를 산출하여 금리 충격이 발생했을 때 이자율 기간구조에 어떠한 영향이 나타나는지 분석하였다. 평균회귀충격, 수준상승충격, 수준하강충격, 비틀림상승충격, 비틀림하강충격의 다섯 종류의 금리 충격 시나리오를 생성하였으며 금리 충격 시나리오 생성과정에서 전제된 다양한 가정들에 대해 민감도 분석을 진행하였다. 각 금리 충격 시나리오들은 이자율 곡선에 각기 다른 형태의 영향을 가하며 금리 충격 전후로 금리 차이가 크게 발생하므로 이러한 금리 충격 위험요인에 대처가 필요함을 알 수 있다. 또한 기존에 주로 사용한 PCA 방법으로 금리 충격 시나리오와의 차이를 분석하였다. PCA의 세 주성분과 DNS의 세 요인은 밀접한 관련성을 나타냈다. 하지만 DNS의 경우 세 요인을 통해 간접적으로 다양한 종류의 금리 충격 시나리오가 생성되기 때문에 DNS 모형이 세분화된 위험 관리의 측면에서는 좀 더 적절함을 알 수 있다. 금리리스크 모형에 대한 다양한 분석과 비교를 통해 국내환경에 적합한 모형을 선정하는 것이 필요할 것이다.

국문 색인어: 신지급여력제도, 금리리스크, 동적벨스시겔모형, 주성분분석

한국연구재단 분류 연구분야 코드: B050704, B051600

* 본 연구는 금융감독원 및 보험개발원의 공식적인 의견과 다를 수 있음을 밝힙니다. 저자 중 김병준, 장봉규는 2018년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 본 연구를 수행하였습니다. (NRF-2017R1A2B4006224)

*** KB 증권, 공학박사(taehy@postech.ac.kr), 제1저자

*** 보험개발원 팀장, 통계학박사(gynoh@kidi.or.kr), 교신저자

*** POSTECH 산업경영공학과 박사과정(kbj219@postech.ac.kr), 공동저자

*** POSTECH 산업경영공학과 교수(bonggyujang@postech.ac.kr), 공동저자

*** 금융감독원 수석조사역, 경영학박사, ASA, CFA(kgpark@fss.or.kr), 공동저자

논문 투고일: 2018. 10. 11, 논문 최종 수정일: 2019. 04. 19, 논문 게재 확정일: 2019. 05. 16

I. 서론

금리는 보험, 채권, 주식, 부동산 등의 다양한 금융상품 가격에 큰 영향을 주는 동시에 개인, 기업 자산 및 부채 평가 금액의 기준이 되기 때문에 금리의 변동위험을 예측하고 대비하는 것은 아주 큰 의미를 지닌다.

최근 국내 보험산업은 보험 제도의 큰 변혁기를 겪고 있다. 보험계약 국제회계기준(IFRS17)과 新지급여력제도(K-ICS)가 2022년에 시행될 예정이다.¹⁾ 새로운 IFRS17 및 K-ICS는 평가시점의 경제적 상황이 반영된다는 것이 현 제도와의 가장 큰 차이로, 금리 상황에 따라 자산, 부채 등의 평가금액이 변화한다. 또한, FY'10년부터 운영 중인 책임준비금 적정성평가(LAT)는 과거 금리 통계 기반에서 평가시점 금리 곡선에 기반한 금리시나리오로 2017년 말 변경되었다.

IFRS17에서는 보험부채의 옵션 및 보증 평가를 위해 금리모형에서 생성된 금리시나리오가 필요하며, K-ICS는 금리리스크 평가를 위해 금리 곡선에 대한 충격 시나리오 산출모형을 검토해야 한다. 노건엽·장봉규·태현욱(2016)은 혼합모형을 이용하여 금리연동형 상품 평가를 위한 금리 시나리오 산출방법을 제안하였다. 또한 노건엽(2018)은 보험사 금리리스크 측정을 위한 충격 시나리오 방식의 모형을 소개하였다. 보험산업의 재무건전성 제도 변화에 따라 국내 보험감독 환경에 적합한 금리시나리오 모형의 운영체계에 대한 방안을 고민해야 할 시점이다.

IFRS17 도입 이전의 보험 산업 규제로는 위험기준 지급여력제도(Risk Based Capital, 이하 RBC 제도)와 SolvencyII가 있다. RBC 제도는 금융감독원이 기존의 EU 방식의 지급여력제도를 전면적으로 개편하여 2009년 도입한 제도로 현행 회계기준하에서 산출된 정보를 이용하여 보험회사에 노출된 다양한 리스크를 산출하고 이에 상응하는 자본을 보유하도록 요구한다. SolvencyII는 EU가 2016년에 도입한 제도로 자산·부채 시가평가, 보유 리스크에 따른 차별적인 요구자본량이 두드러지는 특징이라고 볼 수 있다.

RBC 제도에서는 금리위험액을 향후 1년간 금리변동에 따른 순자산가치 변동으로 정의

1) 금융위원회·금융감독원 보도자료('보험 자본건전성 선진화 추진단' 구성 및 제1차 회의 개최, 2018.11.27.)에서 IFRS17 도입시기와 동일하게 '22년 시행 추진을 언급하였다.

하여 듀레이션 갭 방식으로 측정한다. 그러나 듀레이션 갭 방식은 금리변동과 자산가치의 선형적 관계를 가정하며 만기별 금리 변동수준 차이를 반영하지 못한다는 한계가 명확하다. 그러므로 순자산가치의 변동을 듀레이션 갭 방식이 아닌 금리 충격 시나리오를 통해 산출하는 것이 더 적절하다고 볼 수 있으며, SolvencyII에서의 금리리스크는 PCA 방법을 통한 금리 충격 시나리오를 생성하여 상대충격량 방식으로 측정된다. 하지만 PCA 방법을 통한 금리 충격 시나리오 생성 또한 한계점이 존재한다. PCA에서는 금리리스크가 기간 구조의 변동성만을 산정하기에 금리의 평균회귀현상을 반영하지 못한다. 또한 Solvency II에서와 같이 상대충격량 방식을 사용할 경우 금리의 절대적 크기에 따라 충격 수준도 비례하는 현상이 발생하여 금리변동을 적절히 반영하지 못하게 된다(Charpentier and Villa, 2010).

이에 대한 대안으로 DNS 모형을 이용한 금리리스크 산정 방법이 여러 연구와 보고서에 서 제시되고 있다. Nelson, C. and A., Siegel(1987)은 작은 수의 요인들을 통해 이자율 곡선을 추정하는 Nelson-Siegel 모형을 제시하였다. 이후 Diebold, F. and C., Li(2006), Diebold, F., et al.(2008)은 기존의 Nelson-Siegel 모형을 확장하여 금리 기간구조의 동태적 움직임을 확률적으로 고려할 수 있는 DNS 모형을 제시하였다. IAIS(International Association of Insurance Supervisors)에서는 2020년부터 IAIG(Internationally Active Insurance Group)에 적용할 자기자본 규제인 ICS(Insurance Capital Standard)를 제정하기 위해 필드테스트를 진행 중이다. 2016년 필드테스트에서는 PCA 방식을 이용하여 금리리스크를 산출하였으나 2017년, 2018년 보고서에는 DNS 모형을 이용하여 금리리스크를 산출하였다(IAIS, 2016, 2017, 2018). 임준환·최장훈·한성원(2018)은 다양한 방식의 보험부채평가 방법을 비교하였으며 DNS 모형을 통한 금리 충격 시나리오도 분석하였다. 다만 DNS 모형의 세 요소 및 모수를 추정하는 과정에서 시계열로써 분석한 것이 아니라 고정된 값으로 다루었다는 점에서 한계가 있다.

본 연구에서는 DNS 모형을 통해 금리 충격 시나리오를 생성하여 금리 충격이 이자율 기간구조에 어떠한 영향을 주는지 살펴본다. 살펴볼 금리 충격은 DNS 모형의 수준요인, 기울기 요인, 곡률 요인을 통해 생성된 평균회귀충격, 수준상승충격, 수준하강충격, 비틀림상승충격, 비틀림하강충격이다. 이때 금리 충격 시나리오 생성 과정에서 사용된 다양한

가정들에 대한 민감도 분석 또한 수행되었다. 또한 DNS 모형을 통해 생성된 금리 충격 시나리오가 PCA 방법으로 생성된 금리 충격 시나리오와 어떤 차이점을 가지고 있는지 비교·분석한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 2장에서 DNS 모형을 이용하여 금리에 대한 충격 시나리오를 생성하는 방법과 결과를 설명한다. 3장은 DNS 모형 생성 가정 중 금리 데이터 만기, 데이터 생성주기, 장기선도금리, 금리 충격 후 발생시점에 대해 분석하고 국채와 스왑 금리 사용 결과를 비교한다. 4장에서는 PCA를 이용하여 금리 충격 시나리오 생성 후 DNS 결과를 비교한다. 마지막으로 연구결과를 요약하고 국내환경에 적합한 금리리스크 모형 선정에 대한 필요성을 시사한다.

II. DNS 모형을 사용한 금리 충격 시나리오 생성

1. DNS 모형

DNS 모형은 금리 충격 시나리오를 생성하고 이에 따라 현물 수익률 곡선이 어떠한 영향을 받는지 분석할 수 있는 모형이다. DNS 모형에서 금리 충격 시나리오를 생성하기 위해서는 금리 충격을 설명하는 요인들을 추정해야 한다. 현물 수익률 곡선의 단기 구간에서 해당 요인의 변동에 따라 충격이 가해졌을 때 전체적인 현물 수익률 곡선이 어떠한 영향을 받는지 보여줄 것이다.

본 연구에서는 두 가지 현물 수익률 곡선이 사용된다. 첫 번째 현물 수익률 곡선은 시장에서 거래되고 있는 금융 상품의 가격을 바탕으로 생성된 것으로, 금리 충격의 요인을 추정하기 위한 현물 수익률 곡선이다. 이때 금리 충격 시나리오의 목적에 따라 국채 또는 스왑 금리에서 금리 충격 요인을 추정할 수 있다. 두 번째 현물 수익률 곡선은 금리 충격을 가할 현물 수익률 곡선으로, IAIS(2018)에서 제공하고 있는 각 국가의 보험사 포트폴리오 특성을 반영한 현물 수익률 곡선²⁾이다. 따라서 본 연구에서는 첫 번째 현물 수익률 곡선에

2) 즉, 기본 무위험수익률 곡선에 스프레드가 반영된 무위험수익률 곡선을 말한다.

서 현재 시장에서 거래되고 있는 금융 상품을 바탕으로 금리 충격 요인을 추정한 다음, 두 번째 현물 수익률 곡선에 가해지는 금리 충격의 시나리오를 생성한다. 금리 충격은 두 번째 현물 수익률 곡선의 단기 구간에 가해지며, 단기적인 충격이 전체적인 현물 수익률 곡선에 미치는 영향을 관찰할 것이다.

우선 시장에서 거래되고 있는 금융 상품의 가격을 이용해 첫 번째 현물 수익률 곡선을 생성해야 하며 Smith-Wilson, Bootstrapping 등의 방법을 이용할 수 있다. 그리고 생성된 현물 수익률 곡선을 이용해 DNS 모형에서의 각 요인을 추정하고, 이를 토대로 금리 충격 시나리오를 생성한다.

시점 T 에 1을 지급하는 무이표 채권의 가격을 시점 t 에서 본 값을 $P(t, T)$ 라고 하자. 이 때, 시점 t 에서 본 기한(Tenor) τ 에 대한 현물 수익률 $y_t(\tau)$ 는 다음과 같이 정의된다:

$$y_t(\tau) := -\frac{\log(P(t, t+\tau))}{\tau}. \quad (1)$$

시장에서 거래되고 있는 무이표 채권의 가격을 기반으로 Smith-Wilson Technique, Bootstrapping 등으로 현물 수익률 $y_t(\tau)$ 의 값을 유도해 낼 수 있다.

Diebold, F., et al.(2006)의 DNS 모형에서는 현물수익률을 다음과 같이 모형화하였다:

$$y_t(\tau) := l_t + s_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + c_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right). \quad (2)$$

이때 요인 l_t, s_t, c_t 에 대한 부하>Loading)는 각 요인에 곱해진 상수 1, τ 에 대한 감소 함수 $\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}$, τ 에 대한 오목함수 $\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}$ 이며, 각 부하는 λ 의 값에 따라 결정된다. λ 는 지수적 감소를 의미하는 값으로 작은 값을 가지면 긴 만기의 이자율에 잘 맞으며, 큰 값을 가지면 짧은 만기의 이자율 값에 적합하다. l_t 는 시간의 흐름에 따라 지수적 감소(Exponential decay)를 보이지 않으므로 장기적인 금리의 수준(Level)으로 해석될 수 있다. s_t 는 부하 $\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}$ 가 1에서 시작하여 점차 감소하기 때문에 단기적인 요인을

의미하며 금리 곡선의 기울기(Slope)로 해석될 수 있다. c_t 는 부하 $\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}$ 가 0에서 증가하다 다시 감소하여 0으로 수렴하는 형태이기에 중기적 요인을 의미하며 금리 곡선의 곡률(Curvature) 요인으로 해석될 수 있다.

현물수익률을 결정짓는 l_t, s_t, c_t 는 시간에 따라 다른 값을 가지기 때문에 DNS 모형은 시간의 흐름에 따라 다양한 현물수익률 곡선을 생성할 수 있다. Diebold, F. and C., Li(2006)는 AR(1) 모형을 따르는 세 요인 l_t, s_t, c_t 를 통해 현물수익률을 정확히 근사할 수 있으며 이러한 이자율 모형이 금리 기간구조를 적합(Fitting)한다고 밝혔다(Diebold, F. and C., Li, 2006).

본 연구에서는 l_t, s_t, c_t 이 AR(1) 모형 대신 평균회귀모형을 따른다고 가정하고, l_t, s_t, c_t 의 모형에 대한 모수를 우선 추정하고 이를 바탕으로 금리 충격 시나리오를 제시한다. l_t, s_t, c_t 가 아래의 확률미분방정식(Stochastic differential equation)을 따른다고 가정하자:

$$d \begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^P & \kappa_{12}^P & \kappa_{13}^P \\ \kappa_{21}^P & \kappa_{22}^P & \kappa_{23}^P \\ \kappa_{31}^P & \kappa_{32}^P & \kappa_{33}^P \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_{1,t} \\ d\omega_{2,t} \\ d\omega_{3,t} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

이때 평균회귀모수 부분을 일반적인 행렬이 아닌 대각 행렬로 고려할 수 있다. IAIS(2017)은 일반적인 행렬을 이용한 금리 충격 시나리오가 대각 행렬을 이용한 것에 비해 큰 차이가 없었다고 밝혔다(IAIS, 2017). 실제로 일반적인 행렬을 사용하여 l_t, s_t, c_t 를 추정하고 금리 충격 시나리오를 생성하여도 대각 행렬을 사용한 경우와 유의미한 차이가 발견되지 않았으며, 추가적인 경제적 의미를 제시하지 않는다면 모형의 복잡도 및 계산 비용을 고려할 때 대각행렬을 가정하는 것이 더 효율적이라고 볼 수 있다.³⁾ 평균회귀모수 행렬을 대각행렬로 가정했을 때의 l_t, s_t, c_t 의 움직임은 다음과 같다:

3) 대각행렬을 가정하였을 경우의 결과는 <Appendices>에 서술하였다.

$$d \begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^P & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^P & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^P \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_{1,t} \\ dw_{2,t} \\ dw_{3,t} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

본 연구에서는 이를 다음과 같이 축약하여 표기한다:

$$dX_t = K(\Theta - X_t) + \Sigma dW_t, \\ X_t = \begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, dW_t = \begin{bmatrix} dw_{1,t} \\ dw_{2,t} \\ dw_{3,t} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

모수의 값을 알 수 있다면 식 (4)에 의해 l_t, s_t, c_t 의 움직임을 유도해낼 수 있고, 이에 따른 현물수익률 곡선을 산출할 수 있다.

모수 추정을 위해 식 (4)를 이산화(Discretize)시킨 시계열 모형은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta l_{t_n} \\ \Delta s_{t_n} \\ \Delta c_{t_n} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \Delta l_n \\ \Delta s_n \\ \Delta c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{n+1} - l_n \\ s_{n+1} - s_n \\ c_{n+1} - c_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_{11}^P & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^P & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^P \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_n \\ s_n \\ c_n \end{bmatrix} \right) \Delta_n + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \sqrt{\Delta_n} \begin{bmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \\ Z_{3,n+1} \end{bmatrix}, \quad (6) \\ \Leftrightarrow \Delta X_{t_n} &:= \Delta X_n = K(\Theta - X_n) \Delta_n + \Sigma \sqrt{\Delta_n}. \end{aligned}$$

이때, $\Delta_n := t_{n+1} - t_n, n = 1, \dots, N-1$ 는 각 데이터 시점의 시간간격을 의미하며, $Z_{n+1} \sim MN(0_{3 \times 1}, I_3)$ 는 3차원의 표준다변량정규분포(Standard multivariate normal distribution)를 따르는 값이다. 표기의 편의를 위해 $l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}, X_{t_n}$ 을 각각 l_t, s_t, c_t, X_t 으로 표기한다. 식(6)을 변형하면 다음과 같다:

$$\begin{cases} \Delta l_n = \beta_{1,1} + \beta_{1,2}l_n + \epsilon_{1,n+1} \\ \Delta s_n = \beta_{2,1} + \beta_{2,2}s_n + \epsilon_{2,n+1}, \\ \Delta c_n = \beta_{3,1} + \beta_{3,2}c_n + \epsilon_{3,n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_{1,n} = \beta_{1,1} + \beta_{1,2}X_{1,n} + \epsilon_{1,n+1} \\ Y_{2,n} = \beta_{2,1} + \beta_{2,2}X_{2,n} + \epsilon_{2,n+1}. \\ Y_{3,n} = \beta_{3,1} + \beta_{3,2}X_{3,n} + \epsilon_{3,n+1} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{이 때, } \beta_{1,1} &= \kappa_{11}^P \theta_1^P \Delta_n, \quad \beta_{2,1} = \kappa_{22}^P \theta_2^P \Delta_n, \quad \beta_{3,1} = \kappa_{33}^P \theta_3^P \Delta_n, \\ \beta_{1,2} &= -\kappa_{11}^P \Delta_n, \quad \beta_{2,2} = -\kappa_{22}^P \Delta_n, \quad \beta_{3,2} = -\kappa_{33}^P \Delta_n, \\ \epsilon_{n+1} &:= [\epsilon_{1,n+1} \ \epsilon_{2,n+1} \ \epsilon_{3,n+1}]^T \sim MN(0_{3 \times 1}, \Omega), \Omega = \Sigma \Sigma' \Delta_n. \end{aligned}$$

이때, 각 모수 $\beta_{i,1}$, $\beta_{i,2}$ 의 추정치 $\hat{\beta}_{i,1}$, $\hat{\beta}_{i,2}$ 는 다음과 같이 주어진다:

$$(\hat{\beta}_{i,1}, \hat{\beta}_{i,2}) = \operatorname{argmin}_{(\beta_{i,1}, \beta_{i,2})} \sum_{n=1}^{N-1} (Y_{i,n} - \beta_{i,1} - \beta_{i,2}X_{i,n})^2. \quad (8)$$

이를 정리하면, 현물수익률 데이터를 통해 추정치 $\hat{\beta}_{i,1}$, $\hat{\beta}_{i,2}$ 를 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{i,1} \\ \hat{\beta}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{X_i^2 Y_i} - \overline{X_i} \overline{X_i Y_i}}{\overline{X_i^2} - \overline{X_i}^2} \\ \frac{\overline{X_i Y_i} - \overline{X_i} \overline{Y_i}}{\overline{X_i^2} - \overline{X_i}^2} \end{bmatrix}, \quad \overline{A_i} := \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} A_{i,n} \text{ for } A. \quad (9)$$

따라서 시장에서 거래되고 있는 채권, 스왑 등에 내재된 현물수익률로부터 각 모수의 추정치 $\hat{\beta}_{i,1}$, $\hat{\beta}_{i,2}$ 를 구할 수 있다. 이때 잔차항과 잔차항의 분산 Ω 의 추정치 $\hat{\Omega}$ 는 다음과 같다⁴⁾:

4) 여기에서 사용되는 추정치 $\hat{\Omega}$ 는 정확한 비편향 추정치는 아니다. 그러나 정확한 비편향 추정치는 본 식과 결과상의 큰 차이가 없음을 Dattalo, P.(2013), Ezequiel, U.(2013)의 기법을 통해 알 수 있다.

$$\hat{\Omega}^{true} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N-3} & \frac{1}{N-4+CX(1,2)^2} & \frac{1}{N-4+CX(1,3)^2} \\ \frac{1}{N-4+CX(2,1)^2} & \frac{1}{N-3} & \frac{1}{N-4+CX(2,3)^2} \\ \frac{1}{N-4+CX(3,1)^2} & \frac{1}{N-4+CX(3,2)^2} & \frac{1}{N-3} \end{bmatrix} \circ (\widehat{e_{N-1 \times 3}})' (\widehat{e_{N-1 \times 3}}) \simeq \frac{1}{N-3} ee'.$$

이때, $\circ$ 는 두 행렬의 아다마르 곱(Hadamard product)이다.

$$\begin{aligned}
e &= \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,N-1} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,N-1} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & \dots & e_{3,N-1} \end{bmatrix}, \\
e_{1,n} &= Y_{1,n} - (\widehat{\beta}_{1,1} + \widehat{\beta}_{1,2} X_{1,n}), \\
e_{2,n} &= Y_{2,n} - (\widehat{\beta}_{2,1} + \widehat{\beta}_{2,2} X_{2,n}), \\
e_{3,n} &= Y_{3,n} - (\widehat{\beta}_{3,1} + \widehat{\beta}_{3,2} X_{3,n}). \\
\widehat{\Omega} &= \frac{1}{N-3} ee'.
\end{aligned} \tag{10}$$

따라서 식 (7), (9), (10)에 의하면 모수는 다음과 같이 추정가능하다.

$$\begin{aligned}
\kappa_{ii}^P &= -\frac{\widehat{\beta}_{i,2}}{\Delta_n}, \\
\theta_i^P &= \frac{\widehat{\beta}_{i,1}}{\kappa_{ii}^P \Delta_n} = -\frac{\widehat{\beta}_{i,1}}{\widehat{\beta}_{i,2}}, \\
\widehat{\Sigma} &= chol(\widehat{\Omega}) / \sqrt{\Delta_n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{11}$$

l_t, s_t, c_t 의 모형에 사용되는 모수 추정에 대해 살펴보았으므로 이를 이용하여 어떻게 금리 충격 시나리오를 생성할 수 있는지 살펴보도록 하자. Karatzas and Shreve(2012)에 의하면 식 (4)는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{bmatrix} = \Phi_t \left\{ \begin{bmatrix} l_0 \\ s_0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \int_0^t \Phi_s^{-1} A \, ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} \Sigma \, dW_s \right\}. \tag{12}$$

이때 $\Phi_t = \exp(-Kt)$, $A = K\Theta$ 이다. 따라서 t 시점의 누적 변화량 $\Delta D_t = X_t - X_0$ 은 다음과 같다:

$$\Delta D_t = (I - e^{-Kt})(\Theta - X_0) + \int_0^t e^{-K(t-s)} \Sigma \, dW_s. \tag{13}$$

따라서, 식(13)에 의해 $t = 0$ 의 ΔD_t 는 다변량 정규분포(Multivariate normal distribution)을 따르는 확률변수이다. 이때 ΔD_t 의 평균 μ , 분산 ν 은 다음과 같다.

$$\mu = (I - e^{-Kt})(\Theta - K), \quad \nu = \int_0^t e^{-K(t-s)} \Sigma \Sigma^T e^{-K(t-s)} ds. \quad (14)$$

분산 ν 의 콜레스키 분해(Cholesky decomposition)로 생성된 하방삼각행렬(Lower triangular matrix)을 M 라 가정하면(즉, $M = \text{chol}(\nu)$), ΔD_t 를 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\begin{aligned} \Delta D_t(e) &\doteq \mu + M\mathbf{e}, \\ \mathbf{e} &\sim MN(0_{3 \times 1}, I_3), \\ 0_{3 \times 1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $A \doteq B$ 는 A 와 B 가 같은 확률분포(Probability distribution)를 가짐을 의미한다. $\mathbf{e}$ 는 표준 다변량 정규분포를 따른다. 그러므로 ΔD_t 는 $M\mathbf{e}$ 의 값에 의해 결정되는 함수로 볼 수 있으며, 금리 충격 시나리오에 $M\mathbf{e}$ 에 의해 정해진다.

본 연구에서는 IAIS(2017)의 주성분 형태의 분석을 적용하여 3차원 벡터 $\mathbf{e}$ 를 가장 잘 설명하는 2개의 벡터를 추출한다. 이는 두 개의 벡터만으로도 설명력이 약 99.14%로 매우 높기 때문이다.⁵⁾ 이를 바탕으로 2차원 평면상에서 충격 $\Delta D_t(\mathbf{e})$ 을 관찰하고 충격에 대한 시나리오를 생성 및 분석한다. 주성분 형태의 분석을 위해서는 먼저 충격 $\Delta D_t(\mathbf{e})$ 의 각 요소의 단위를 맞춰주어야 한다. 이를 위하여 스케일링 요인(Scaling factor) S 를 곱한 확률변수 X_t 를 아래와 같이 정의한다:

5) 고유값이 높은 순으로 각각 0.0112, 0.003, 0.001의 고유값을 가진다.

$$\begin{aligned}
X_t &= S \Delta D_t, \\
S &= \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \sum_{\tau=1}^{LOT} 1, \\
S_2 &= \sum_{\tau=1}^{LOT} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right), \quad S_3 = \sum_{\tau=1}^{LOT} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

여기에서 LOT 는 관찰 가능한 최대만기(Last Observed Term)을 의미한다. 행렬 S 의 각 대각원소는 DNS 모형에서 현물 수익률을 결정하는 각 요인 l_t, s_t, c_t 에 곱해지는 부하를 현재부터 관찰 가능한 최대만기까지 모두 더한 값이다. 이때, 충격 $\Delta D_t(e)$ 에 스케일링 요인 S 를 곱한 값인 벡터 X_t 는 다음을 만족한다:

$$X_t = S\mu + Ne, \quad N = SM. \tag{17}$$

X 의 공분산행렬(Covariance matrix) NN' 가 다음과 같이 대각화(Diagonalize)된다고 가정하자.

$$NN' = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1}, \quad \text{where } P = [P_1, P_2, P_3]. \tag{18}$$

여기서 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ 는 NN' 의 고유값(Eigenvalue), P_1, P_2, P_3 는 각각 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 에 대응하는 정규직교(Orthonormal)의 고유벡터(Eigenvector)이다. 본 연구에서는 금리충격을 고유벡터에 대해 분해하여 다양한 금리 충격 시나리오를 살펴보고자 한다. 이때, 가장 작은 고유값 λ_3 에 해당하는 P_3 부분은 제외하고, P_1, P_2 를 충격 시나리오를 생성하는데 사용하도록 한다. 따라서 ΔD_t 에 대응되는 두 기본 충격 시나리오는 MP_1, MP_2 가 된다. 이는 충격 $\Delta D_t(P_1), \Delta D_t(P_2)$ 을 기반으로 금리 충격 시나리오를 생성하는 것을 의미한다.

금리 충격 시나리오는 (1) 평균회귀충격(Mean-reversion shock), (2) 수준충격(Level shock), (3) 비틀림충격(Twist shock)의 세 종류의 충격을 고려한다. 평균회귀충격은

DNS 모형에서 l, s, c 시계열이 정확히 평균회귀모형의 예측을 따를 때 발생하는 평균적인 충격을 의미한다(즉, $\Delta D_t = \mu, e \rightarrow 0$). 수준충격은 평균충격 시나리오에 비해 전체적으로 금리가 상승(하강)하는 시나리오를 의미하며, 비틀림충격은 평균회귀충격 시나리오에 비해 단기 금리는 상승(하강)하고 장기 금리는 하강(상승)하는 시나리오를 의미한다. 수준충격 및 비틀림 충격을 수리적으로 정의하기 위하여 충격 $\Delta D_t(P_1), \Delta D_t(P_2)$ 를 ϕ 만큼 회전시킨 충격 $R_{t,1}(\phi), R_{t,2}(\phi)$ 을 식(19, 20)으로 나타낸다:

$$R_{t,1}(\phi) = \cos(\phi)\Delta LSC_t(P_1) + \sin(\phi)\Delta LSC_t(P_2). \quad (19)$$

$$R_{t,2}(\phi) = \cos(\phi)\Delta LSC_t(P_2) - \sin(\phi)\Delta LSC_t(P_1). \quad (20)$$

식 (17)에 의해 두 충격 시나리오 $\Delta LSC_t(P_1), \Delta LSC_t(P_2)$ 은 MP_1, MP_2 와 같음을 알 수 있으므로 식 (19, 20)은 다음과 같다:

$$R_{t,1}(\phi) = \cos(\phi)MP_1 + \sin(\phi)MP_2. \quad (19')$$

$$R_{t,2}(\phi) = \cos(\phi)MP_2 - \sin(\phi)MP_1. \quad (20')$$

이때, MP_1, MP_2 은 서로 직교(Orthogonal)하지 않을 수 있다. 고유벡터 P_1, P_2 가 M 에 대한 고유벡터가 아니라 이를 스케일링한 N 에 대한 고유벡터이기 때문이다. 따라서 충격 $R_{t,1}(\phi), R_{t,2}(\phi)$ 을 스케일링하여 직교하는 두 벡터 NP_1, NP_2 로 표현하면 다음과 같다:

$$R_{t,1}(\phi)^* = S \cdot R_{t,1}(\phi) = \cos(\phi)NP_1 + \sin(\phi)NP_2. \quad (19'')$$

$$R_{t,2}(\phi)^* = S \cdot R_{t,2}(\phi) = \cos(\phi)NP_2 - \sin(\phi)NP_1. \quad (20'')$$

비틀림 충격은 만기 $\tau = 1$ 부터 만기 $\tau = LOT$ 까지 모든 만기 곡선에서 발생하는 충격량의 총합이 0이 되는 충격으로 볼 수 있다. 충격 시나리오 Me_1, Me_2 에 의해 τ 시점에 가해지는 충격을 $S_1(\tau), S_2(\tau)$ 라고 하자. $R_{t,2}(\phi)$ 가 비틀림 충격이 되게 하는 ϕ 를 ϕ' 라고 할 때, ϕ' 는 비틀림충격의 정의에 따라 다음 식을 만족한다:

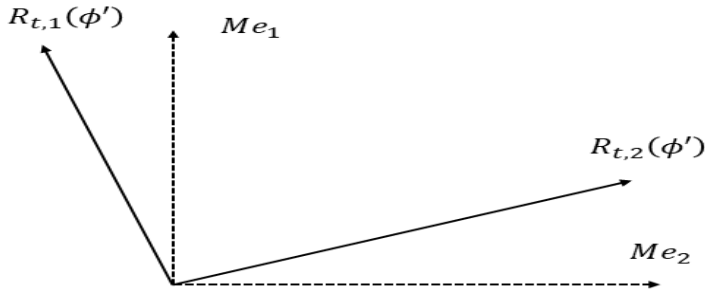
$$\sum_{\tau=1}^{LOT} (\cos(\phi') S_2(\tau) - \sin(\phi') S_1(\tau)) = 0. \quad (21)$$

따라서 식(21)에 의해 충격 $R_{t,1}(\phi')$, $R_{t,2}(\phi')$ 을 각각 수준충격과 비틀림충격으로 만드는 회전각도 ϕ' 는 다음과 같은 값을 가진다:

$$\phi' = \arctan\left(\sum_{\tau=1}^{LOT} S_2(\tau) / \sum_{\tau=1}^{LOT} S_1(\tau)\right). \quad (22)$$

충격 시나리오 Me_1 , Me_2 의 회전을 통한 수준충격과 비틀림충격은 <Figure 1>과 같이 나타난다.

<Figure 1> $R_{t,1}(\phi')$, $R_{t,2}(\phi')$ Generations from Me_1, Me_2 rotations



이를 바탕으로 충격을 주고자 하는 시점 t^{shock} 의 수익률 곡선 $y_{t^{shock}}(\cdot)$ 에 대해 평균회귀충격, 수준충격, 비틀림충격을 받은 수익률 곡선 $y_{t^{shock}}^m(\cdot)$, $y_{t^{shock}}^{lv\pm}(\cdot)$, $y_{t^{shock}}^{tw\pm}(\cdot)$ 은 각각 다음과 같다:

$$y_{t^{shock}}^m(\tau) = y_{t^{shock}}(\tau) + \left[1, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right] M. \quad (23)$$

$$y_{t^{shock}}^{lv\pm}(\tau) = y_{t^{shock}}^m(\tau) \pm N^{-1}(0.995) \left[1, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right] R_{t,1}(\phi') \quad (24)$$

$$y_{t^{shock}}^{tw\pm}(\tau) = y_{t^{shock}}^m(\tau) \pm N^{-1}(0.995) \left[1, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}, \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right] R_{t,2}(\phi') \quad (25)$$

이러한 충격 시나리오는 시장에서 관찰할 수 있는 만기까지의 현물 수익률 곡선에 영향을 미치게 된다. 즉, $\{\tau_m^{shock}\}_{1 \leq m \leq M^{shock}}$ 에 대해서 $\{y_t^{shock}(\tau_m^{shock})\}_{1 \leq m \leq M^{shock}}$ 에 대해 충격받은 곡선들을 계산한다. 각 시나리오별 현물 수익률 곡선은 <Table 1>에 설명한다.

<Table 1> Types of Interest Rate Shocks and Their Explanations

Scenarios	Interest rate curve (Segment 1)	LTFR	Explanation
Base	$y_t^{shock}(\tau_m^{shock}),$ $1 \leq m \leq M^{shock}$	4.5%	Interest rate curves without any shocks
Mean-reversion shock	$y_t^m(\tau_m^{shock}),$ $1 \leq m \leq M^{shock}$	4.6%	Scenarios in which the shock is at the average level of DNS model forecast
Level up shock	One of $y_t^{lv \pm}(\tau_m^{shock})$ with the largest average, $1 \leq m \leq M^{shock}$	5.05%	Scenarios in which interest rates rise overall over the Mean-reversion shock scenario
Level down shock	One of $y_t^{lv \pm}(\tau_m^{shock})$ with the lowest average, $1 \leq m \leq M^{shock}$	4.15%	Scenarios in which interest rates decline overall below the Mean-reversion shock scenario
Twist up to down shock	One of $y_t^{tw \pm}(\tau_m^{shock})$ which rises in short term, $1 \leq m \leq M^{shock}$	4.6%	Scenarios in which interest rates rise in the short term and decline in the long term compared to the Mean-reversion shock scenario
Twist down to up shock	One of $y_t^{tw \pm}(\tau_m^{shock})$ which declines in short term, $1 \leq m \leq M^{shock}$	4.6%	Scenarios in which interest rates decline in the short term and rise in the long term compared to the Mean-reversion shock scenario

2. DNS 모형을 이용한 충격 시나리오 생성

가. 데이터

금리 충격 시나리오를 생성하기 위해서는 금리 충격 요인인 l_t, s_t, c_t 시계열 및 시계열 모형의 모수가 필요하다. 이를 구하기 위해서는 현물 수익률 곡선이 요구되며 현물 수익률 곡선은 국채 수익률로부터 Smith-Wilson 방법을 통해 유도한다. DNS 모형을 이용해 충격 시나리오를 생성하는 과정은 <Figure 2>와 같다.

<Figure 2> The Process of the Scenario Generation



금리 충격 요인을 추정하기 위해 사용되는 첫 번째 현물 수익률 곡선은 금융투자협회 채권정보센터의 국채 수익률 데이터를 활용하여 산출한다. 사용된 국채의 만기는 1년, 1.5년, 2년, 2.5년, 3년, 5년, 10년, 그리고 20년이며, 2007년 1월 5일부터 2017년 12월 29일까지의 주간 데이터를 사용하였다.⁶⁾ Smith-Wilson 방법을 사용하기 위해서는 현물 수익률 곡선의 만기가 길어짐에 따라 수렴하게 되는 값인 장기선도금리(Long Term Forward Rate; 이하 LTFR)가 요구되며 <Table 1>의 값을 사용하였다. EIOPA(2014)는 거시경제학적인 기대인플레이션과 기대실질성장율의 합으로 장기선도금리를 산출하고 이 결과를 이용해 노건엽·장봉규·태현욱(2016)은 장기선도금리를 4.2%로 설정하였다. 본 연구에서는 IAIS(2017)를 참고하여 장기선도금리를 4.5%로 가정하였다. 또한, 시나리오별로 장기선도금리가 다른 것은 금리 충격에 의해 장기선도금리 자체가 영향을 받아 값이 변동할 수 있기 때문이며 각 시나리오에 해당하는 값은 IAIS(2017)을 참고하였다.

6) 30년 만기 국채 수익률은 2012년 9월부터 데이터가 존재하므로 발행기간이 매우 짧아 신뢰성이 낮은 것으로 판단되어 제외하였다. 또한 1년 미만의 만기 데이터의 사용여부에 대한 민감도 분석은 3.1 절에서 다룬다. 한편, 모형에서 사용되는 시점들인 $\{t_n\}_{n=1}^N, t_n < t_{n+1}, n = 1, \dots, N-1$ 은 일정한 간격인 $\Delta_n = 1/52$ 을 가진다. 이는 주간 데이터를 사용했기 때문이다.

DNS 모형에서 각 요인의 부하를 조절하기 위한 모수인 λ 의 값은 Diebold, F. and C., Li(2006)의 0.0609를 사용하였다.⁷⁾ 이는 곡률 요인이 만기 $\tau = 30$ 에서 최대가 되는 값이다. 곡률 요인은 중기 금리에 영향을 주는 값으로 λ 값이 지나치게 낮아지면 단기 금리에 영향을, 반대로 λ 값이 지나치게 크면 장기 금리에 영향을 주게 되기 때문에 곡률 요인이 만기 $\tau = 30$ 에서 최댓값을 가지게 하는 λ 값을 설정하였다. l_t, s_t, c_t 시계열을 추정하기 위해 관찰하는 만기는 월 단위를 이용해 $\{\tau_m^{lsc}\}_{1 \leq m \leq M^{lsc}}$ 로 표기하며, 본 연구에서는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20년을 사용하였다.⁸⁾ 최종적으로 금리 충격을 가하여 시나리오를 생성할 두 번째 현물 수익률 곡선은 IAIS(2018)에서 제시한 무위험 이자율 곡선과 일반적 이자율 곡선을 사용하였다. 일반적 이자율 곡선은 기본 무위험 수익률 곡선에 스프레드가 반영된 무위험수익률 곡선이다. 스프레드는 보험사 자산 포트폴리오에서 신용위험을 차감하여 산출한다.

나. 충격 시나리오 산출 결과

Step 1. 현물 수익률 산출

우선 국채 수익률 데이터로부터 현물 수익률 곡선을 산출해야 한다. IAIS(2017)에 따르면 무위험 수익률 곡선은 만기에 따라 세 부분(Segment 1, Segment 2, Segment 3)으로 나눌 수 있다. Segment 1은 만기 0년~20년 구간으로 국채 혹은 스왑 등의 이자율 기반 금융 상품으로 얻을 수 있는 시장 정보에 기반을 둔 부분이다. Segment 2는 만기 20년~60년 구간으로 Smith-Wilson 방법을 통해 보외법(Extrapolation)으로 추정하는 부분이다. 마지막으로 Segment 3은 만기 60년~100년 구간으로 금리곡선이 안정적인 LTFR으로 수렴하는 부분이다. DNS 모형 캘리브레이션(Calibration), 즉 l, s, c 모형의 모수를 추정하는데 사용되는 금리 데이터는 그 중 Segment 1 구간이다. 국채 수익률은 <Table 2>와 같다.

7) 이때 모수 λ 는 만기 τ 의 단위에 따라 단위가 달라진다. 본 연구에서는 보험산업에서 일반적으로 사용하는 월 단위 만기를 사용하였으며, 이에 따라 모수 λ 에 12를 곱하면 연단위로 변환할 수 있다. 모수 λ 를 추정하는 방법은 <Appendices>에 서술하였다.

8) 이 경우 $M^{lsc} = 12$ 가 되며 $\tau_1^{lsc} = 12, \tau_2^{lsc} = 24, \dots, \tau_{12}^{lsc} = 360$ 을 만족한다. τ 를 월단위로 사용하는 것은 모수 λ 의 값을 Diebold, F. and C., Li(2006)를 따라 0.0609로 사용하기 위함이다.

국채의 수익률이 주어진 만기 T 에 대해 $y_T\%$ 이라는 것은 반년마다 이표를 $y_T/2 \times 10^{-2}$ 씩 지급하고 만기에 원금 1을 모두 상환하는 국채의 현재 시점 가격이 1이라는 의미이다.

〈Table 2〉 Bond Yield for Each Maturity – Segment 1

(Unit: %)

Time/ Maturity	3M	6M	9M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	5Y	10Y	20Y
'16.12.30	1.312	1.45	1.512	1.562	1.612	1.635	1.66	1.64	1.807	2.092	2.162
'17.12.29	1.517	1.645	1.792	1.862	2.010	2.082	2.152	2.135	2.347	2.467	2.450

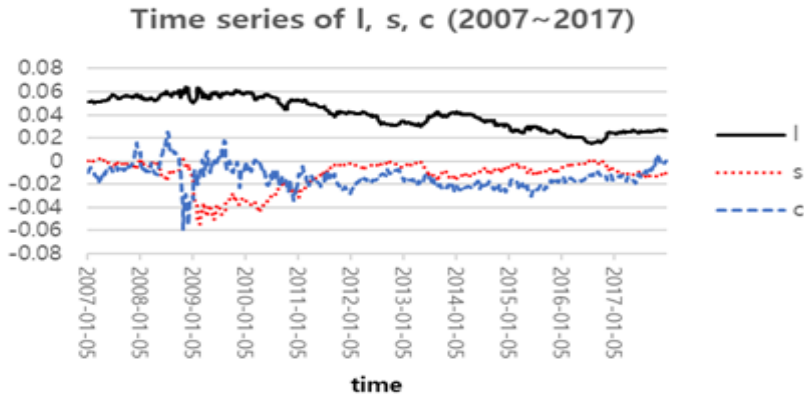
따라서 각 시점의 국채 수익률에 대해 만기별로 현금흐름을 투영(Projection)할 수 있으며, Smith-Wilson 방법을 통해 투영된 현금흐름으로부터 현물 수익률 $y_t(\tau)$ 을 산출할 수 있다. Smith-Wilson 방법은 이자율에 기반을 둔 금융 상품의 현재 시장가, 미래의 현금흐름 발생일 및 발생액으로부터 이자율 곡선을 산출하는 방법이다. 간단한 방법으로 이자율 곡선의 해석적인 값(Analytic value)을 구할 수 있으며 현금흐름을 알 수 있는 금융 상품이라면 모두 사용할 수 있다는 장점이 있지만, 반면 사용되는 모수 중 일부를 외부에서 가져와야 하며 경우에 따라 이자율 곡선이 감소하는 구간이 생길 수도 있다.

Step 2. $l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}$ 시계열 데이터 생성 및 시계열 모형 모수 추정

l_t, s_t, c_t 모형의 모수는 Step 1.에서 생성한 현물 수익률 곡선에서 얻은 특정 만기의 금리 값들을 통해 추정해낸다. 즉, 현물 수익률 곡선으로부터 각 시점의 $l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}$ 값을 계산해야한다. 이는 식 (2)에 가장 적합한 $l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}$ 값을 최적화 문제를 풀어 구할 수 있다. 주어진 시점 t_n 에 대해 $l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}$ 는 다음 최적화 문제의 해와 같다:

$$(l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}) = \underset{l, s, c}{\operatorname{argmin}} \sum_{m=1}^M \left(y_{t_n}(\tau_m^{LSC}) - \left(l + s \left(\frac{1 - e^{-\lambda \tau_m^{LSC}}}{\lambda \tau_m^{LSC}} \right) + c \left(\frac{1 - e^{-\lambda \tau_m^{LSC}}}{\lambda \tau_m^{LSC}} - e^{-\lambda \tau_m^{LSC}} \right) \right) \right)^2. \quad (26)$$

2007년부터 2017년까지의 l_t, s_t, c_t 시계열은 〈Figure 3〉와 같다.

〈Figure 3〉 Estimated l , s , c Time Series(2007~2017)

$l_{t_n}, s_{t_n}, c_{t_n}$ 시계열을 통해 식 (4)의 모수를 추정할 수 있으며, 모형의 모수 추정 방법은 식 (9), (10), (11)을 따른다. l, s, c 모형의 모수는 〈Table 3〉에 제시하였다.

〈Table 3〉 Parameters Estimation for Each Period

Classification	2007 ~ 2017	2010 ~ 2017
κ_{11}^P	0.166207	0.447419
κ_{22}^P	0.618714	0.863276
κ_{33}^P	3.805918	3.943955
θ_1^P	0.027267	0.025958
θ_2^P	-0.01348	-0.00722
θ_3^P	-0.01328	-0.01629
σ_{11}	0.008377	0.006849
σ_{21}	-0.00794	-0.0068
σ_{22}	0.010614	0.006072
σ_{31}	-0.00258	-0.00253
σ_{32}	-0.01548	-0.01062
σ_{33}	0.021746	0.013625

Step 3. 금리 충격 시나리오 생성

〈Figure 4〉는 평균회귀충격, 수준상승충격, 수준하강충격, 비틀림상승충격, 비틀림하강충격에 대하여 각각 금리 충격 시나리오를 생성한 결과를 나타낸다. 각각의 충격에 대하여 무위험 이자율 곡선과 일반적 이자율 곡선에 충격을 생성하였다. 또한 금리 충격 생성 과정에서 l_t , s_t , c_t 시계열의 생성에 필요한 금리 데이터의 기간에 따라 두 가지 시나리오를 제시하여 총 네 가지 시나리오를 분석한다. 각각의 데이터 기간은 2007년~2017년, 2010년~2017년으로 금융위기 기간의 포함 여부에 따라 시나리오의 차이를 관찰할 수 있다.

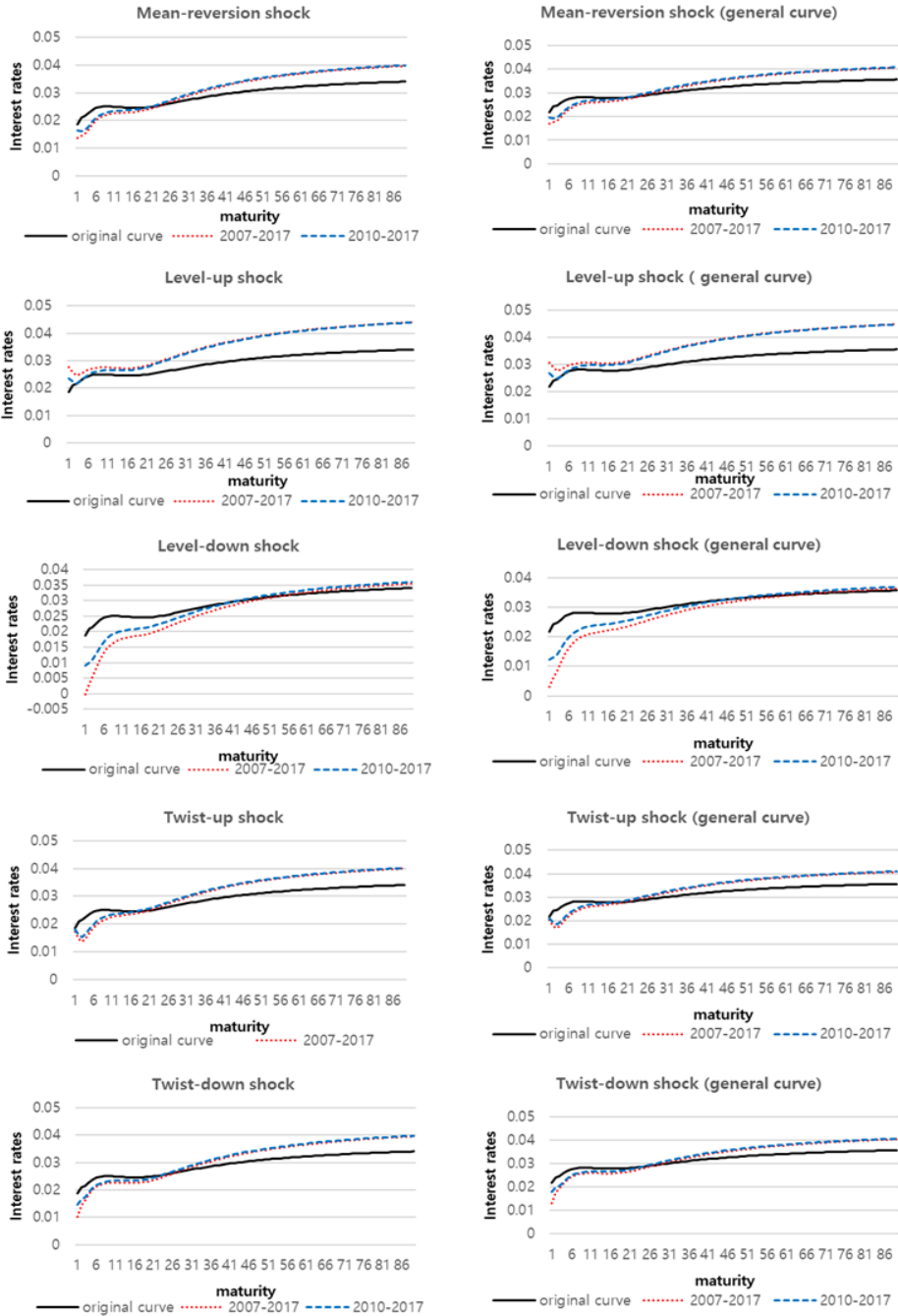
금리 충격 시나리오는 l_t , s_t , c_t 시계열로부터 식 (23) ~ 식 (25)를 통해 구해진다. 이때 3차원 벡터를 가장 잘 설명하는 두 벡터를 PCA 방법으로 추출하여 이 두 벡터를 금리 충격 생성 시에 사용하였다.

이는 세 벡터의 고유값이 높은 순으로 각각 0.0112, 0.003, 0.001으로, 두 벡터의 설명력이 약 99.14%에 다다르기 때문에 고유값이 가장 작은 벡터는 고려하지 않아도 모형의 설명력이 충분하기 때문이다.

금융위기 기간의 데이터를 포함한 2007년 시나리오가 2010년 시나리오에 비해 금리충격의 절댓값이 더 크게 관찰되었다. 특히 수준하강충격의 경우 충격 전후로 약 2%의 금리차가 나타났다. 〈Figure 4〉의 왼쪽 그래프들은 무위험 이자율 곡선에 금리 충격 시나리오를 생성한 것이고, 오른쪽 그래프들은 일반 이자율 곡선에 금리 충격 시나리오를 생성한 것이다.⁹⁾

9) 본 연구에서 금리 충격 시나리오 그래프의 original curve는 금리 충격 발생 이전의 이자율 곡선을 의미한다.

〈Figure 4〉 Interest Rate Curves for Each Shock Scenario Shocks to the Risk-free Interest Rate Curve and the General Rate Curve



III. DNS 모형 가정 분석

2장의 DNS 모형을 사용한 금리 충격 시나리오 생성 방법은 몇 가지 가정들을 전제하였다. 본 장에서는 이러한 가정들이 금리 충격 시나리오의 생성에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보고 가정의 적절성을 검증하고자 한다.

1. 금리 데이터의 만기

금리 충격 시나리오 생성 시 사용한 금리 데이터의 만기는 1년, 1.5년, 2년, 2.5년, 3년, 4년, 5년, 7년, 10년, 그리고 20년이다. 본 절에서는 3개월, 6개월, 9개월의 단기 만기 데이터를 추가하였을 때 금리 충격 시나리오가 어떻게 변화하는지 살펴보려 한다. 만기 30년 이상의 데이터는 노건엽 등(2016)에서 기술한 것과 동일하게 데이터 축적시기가 짧아 분석에서 제외하였다. 만기 20년 데이터를 제외한 경우는 분석을 진행해 보았으나 유의미한 차이는 발견되지 않아 분석에서 제외하였다.

단기 만기를 추가하여 관찰할 대상은 총 3가지이다.

- (1) 현물 수익률 곡선 생성 단계에 사용되는 금리 데이터 만기
- (2) DNS 모형 캘리브레이션에 사용할 만기
- (3) 충격 반영할 Segment 1의 만기

우선, 현물 수익률 곡선 생성 시 사용하는 금융 자산의 데이터에 만기 3개월, 6개월, 9개월 데이터를 추가하여 금리 충격 시나리오가 어떻게 달라지는지 살펴보았다. 현물 수익률 곡선 생성 시 만기 1년 미만 데이터 추가에 따른 l, s, c 시계열은 〈Figure 5〉와 같이 큰 차이가 없는 것으로 보인다. 이를 바탕으로 금리 충격 시나리오를 생성한 경우는 〈Figure 6〉으로 금리 충격 시나리오에서도 큰 차이는 드러나지 않는다. 〈Figure 5〉, 〈Figure 6〉은 기본 무위험 수익률 곡선에 금리 충격을 가한 시나리오에 대한 그래프이다.¹⁰⁾ 그러나 일

10) 〈Figure 5〉, 〈Figure 6〉의 그래프에서 *가 표시된 범례가 1년 미만 만기 데이터를 추가 사용한 경우를 의미한다.

반 수익률 곡선에서도 마찬가지로 단기 만기 데이터의 추가여부는 유의미한 결과를 나타내지 않았다.

두 번째로 DNS 모형 캘리브레이션 단계에서 어떤 만기의 데이터를 사용하여 l, s, c 모형의 모수를 추정할지 정해야 하는데, 이때 1년 미만의 단기 만기인 3개월, 6개월, 9개월을 추가하여 금리 충격 시나리오가 어떻게 달라지는지 살펴보았다. 이 만기는 식 (26)의 τ_m^{LSC} 에 해당하는 값이다. 즉, 생성된 현물수익률 곡선 상에서 l, s, c 추정을 위해 어떤 만기 값의 데이터를 사용할지 정하는 단계이다. 그러므로 이 값을 어떻게 설정하는가에 따라 추정된 l, s, c 시계열이 달라질 수 있다. 1년 미만 만기 추가에 따른 l, s, c 시계열은 <Figure 7>와 같다. l 시계열은 차이가 미미하지만 s 시계열은 l 보다 조금 더 큰 차이를 보이고, c 시계열은 가장 큰 차이를 나타내고 있다. 이를 바탕으로 금리 충격 시나리오를 생성한 결과는 <Figure 8>와 같다.¹¹⁾

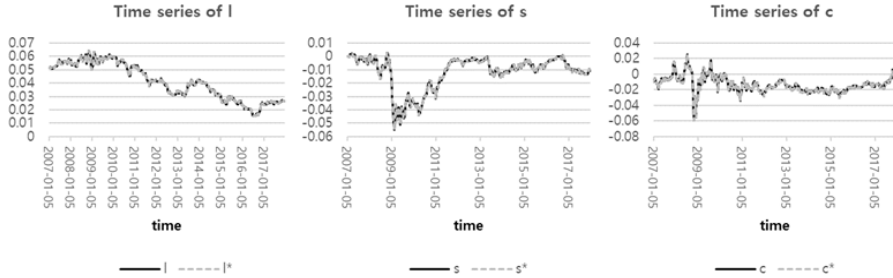
<Figure 8>에 따르면 DNS 모형 캘리브레이션 과정에서 단기 만기를 고려할 경우, 금리 충격 시나리오에서 이자율 곡선의 단기 만기 부분에 차이가 발생한다. 10년 이후 만기의 경우는 두 시나리오가 큰 차이를 보이지 않는다. 또한 단기 만기를 고려할 경우 충격 발생 이후의 이자율이 충격 종류와 무관하게 증가함을 알 수 있다. 그러므로 DNS 모형 캘리브레이션 과정에서 충분한 수준의 단기 만기를 고려하지 않을 경우, 금리 충격 시나리오에서 금리 충격이 과소평가 될 가능성이 존재한다.

마지막으로 충격을 줄 Segment 1의 만기에 단기 만기인 3개월, 6개월, 9개월을 추가하여 금리 충격 시나리오가 어떻게 달라지는 지 살펴보았으며 이는 <Figure 9>와 같다. 금리 충격 시나리오에서는 두 시나리오가 큰 차이를 보이지 않는다.

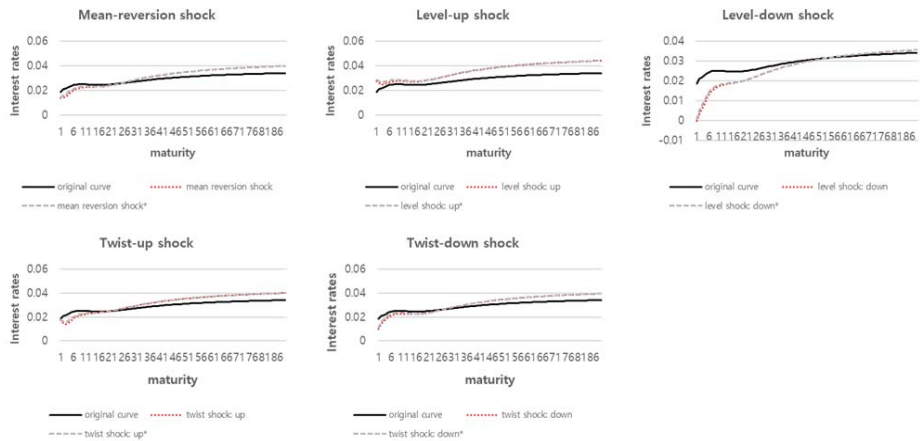
분석 대상이 충격을 줄 금리 곡선의 만기이므로 금리 충격 생성 이전의 l, s, c 시계열은 단기 만기 추가 여부와 무관하게 동일하다. 따라서 금리 충격 생성 시나리오의 마지막 단계에서 Segment 1의 만기를 조정하는 것이기 때문에 다른 두 가정에 대한 테스트보다 작은 차이를 나타내고 있다.

11) <Figure 7>, <Figure 8>의 그래프에서 *가 표시된 범례가 DNS 모형 캘리브레이션 과정에서 1년 미만의 단기 만기를 고려한 경우를 의미한다. <Figure 8>의 original은 금리 충격을 가하기 이전의 이자율 곡선, base는 단기 만기 데이터를 사용하지 않은 금리 충격 시나리오를 의미한다. 이는 <Figure 9>도 해당된다.

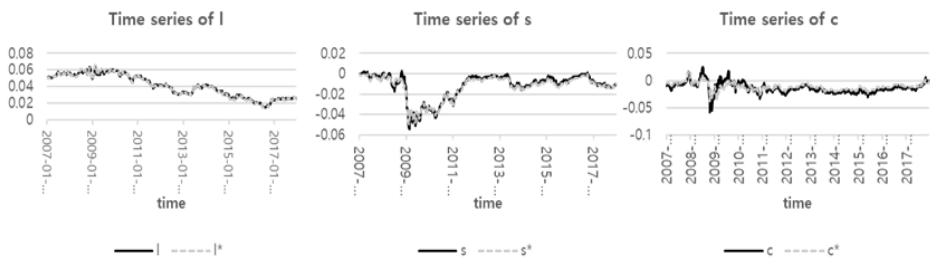
〈Figure 5〉 Comparison of I,s,c Time Series for the Use of less than One-year Maturity Data When Generating the Interest Curve



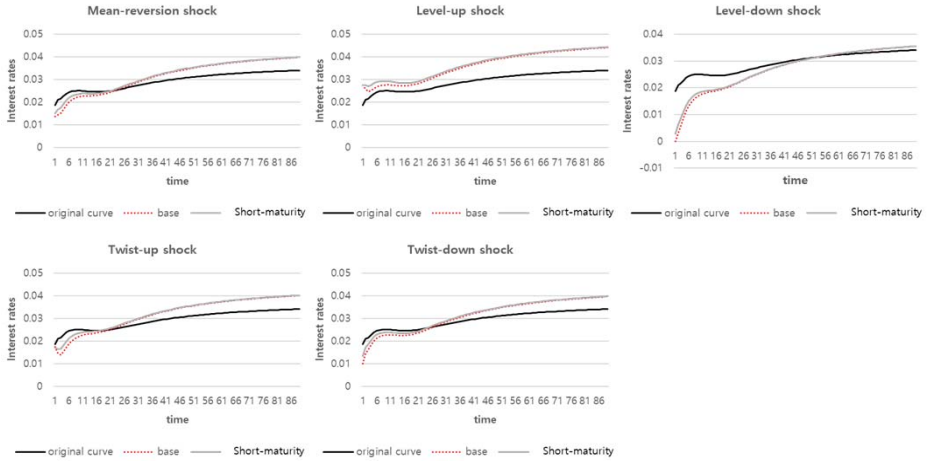
〈Figure 6〉 Comparison of the Shock Scenarios for the Use of less than One-year Maturity Data When Generating the Interest Curve



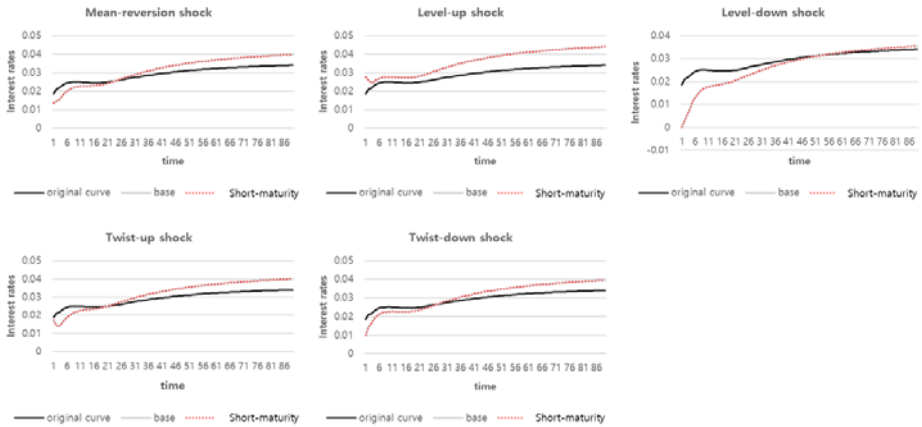
〈Figure 7〉 Comparison of I,s,c Time Series for the Use of less than One-year Maturity Data When Calibrating DNS Parameters



〈Figure 8〉 Comparison of the Shock Scenarios for the Use of less than One-year Maturity Data When Calibrating DNS Parameters



〈Figure 9〉 Comparison of the Shock Scenarios for the Use of less than One-year Maturity Data to Shocked Interest Rate Curves



2. DNS 모형의 모수 λ

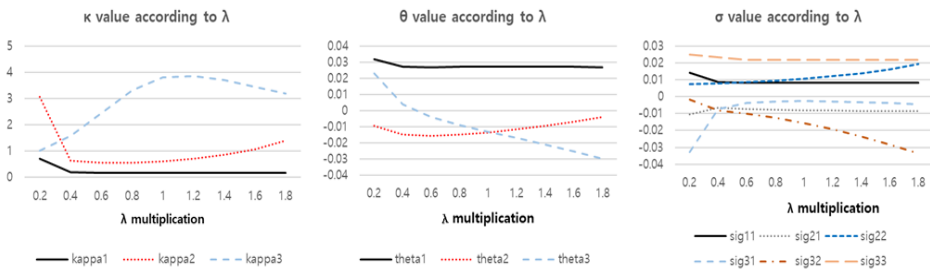
본 연구에서는 DNS 모형의 모수 λ 를 Diebold, F. and C., Li(2006)에서 사용한 $\lambda = 0.0609$ 를 사용하였다. 이는 곡률 요인 $\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}$ 이 $\tau = 30$ 에서 최대가 되게 하는 값이다. 따라서 모수 λ 는 곡률 요인의 형태를 결정지며, 곡률 요인을 정의하는 값

이라고 볼 수 있다.

본 절에서는 기본 가정 $\lambda = 0.0609$ 에 대하여 0.2부터 1.8까지 0.2 단위로 배율을 조정하여 다양한 모수 λ 에 대한 금리 충격 시나리오를 생성한다. λ 의 값이 감소하면 곡률 요인의 정의에 따라 곡률 요인이 최댓값을 가지는 시점이 증가하게 된다. 모수 λ 의 배율에 따라 l, s, c 모형의 모수 κ, θ, σ 값, l, s, c 시계열, 금리 충격 시나리오가 각각 어떻게 영향을 받는지 살펴본다.

〈Figure 10〉은 l, s, c 모형의 모수 κ, θ, σ 값이 모수 λ 에 따라 어떻게 변하는지 보여준다. $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ 는 각각 l, s, c 의 장기평균값에 대한 수렴 속도이며, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 는 각각 l, s, c 의 장기평균값을 의미한다. 또한 $\sigma_{i,j} (i, j = 1, 2, 3)$ 은 l, s, c 모형의 변동성을 나타낸다. λ 값의 증가에 따라 모수 κ, θ, σ 값은 일정한 경향성을 따라 변한다. $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ 는 각각 l, s, c 의 장기평균값에 대한 수렴 속도를 의미하기 때문에, λ 의 변화에 곡률 요인이 가장 큰 영향을 받는 것으로 보인다. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 는 각각 l, s, c 의 장기평균값을 의미하며 l, s, c 는 이 값으로 수렴하는 성질을 보인다. 모수 $\sigma_{i,j}$ 의 경우 l, s, c 모형의 변동성을 나타내는 값으로 상대적으로 κ, θ 에 비하여 작은 변화를 보인다. λ 가 0.4 이하로 작지 않다면 각각의 모수는 λ 값과 무관하게 전반적으로 비슷한 값을 가지거나 완만히 증가 또는 감소하는 경향을 보인다.

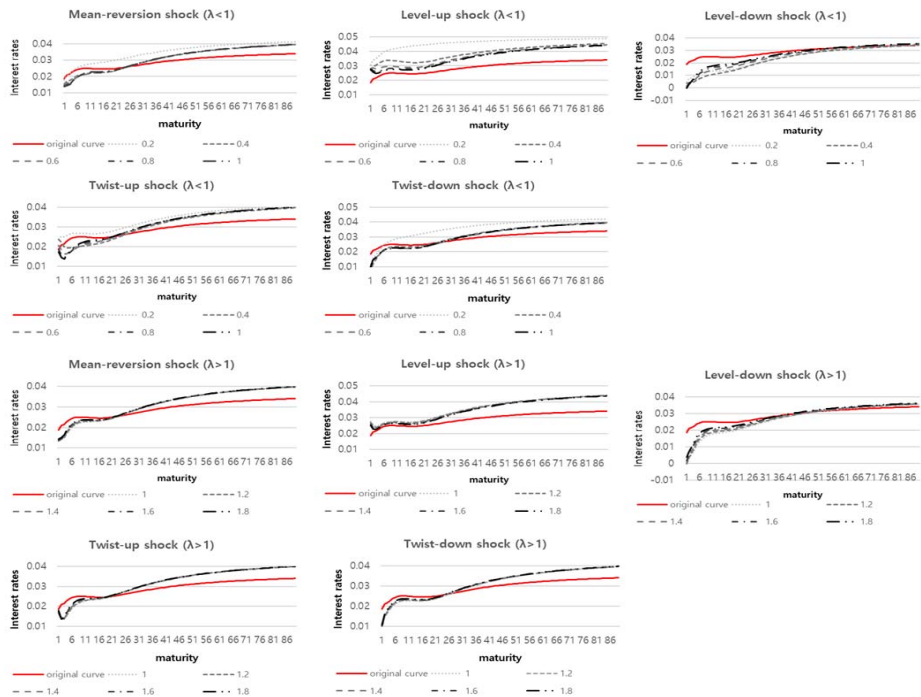
〈Figure 10〉 l, s, c Parameter Changes according to λ



〈Figure 11〉은 l, s, c 시계열이 모수 λ 에 따라 어떻게 변하는지 나타내고 있다. 약 0.4 배 미만의 낮은 λ 의 배율에 대해서는 κ, θ, σ 값이 모두 불안정한 값을 보이며 l, s, c 시계열도 불안정하게 큰 변동을 보였다. 이는 λ 의 값이 낮아지면 각 요인에 대한 부하가 지나치게 낮아져 l, s, c 모형 자체가 불안정해지는 것으로 해석된다.

〈Figure 11〉 I, s, c Time Series Changes according to λ 

〈Figure 12〉는 모수 λ 값에 따라 최종적인 금리 충격 시나리오가 변화하는 현상을 보여준다. 충격을 받기 전 금리 곡선과 기준 λ 에 대한 금리 충격 시나리오, 그리고 다양한 값의 λ 에 대한 금리 충격 시나리오를 나타낸다. λ 값이 커짐에 따라서 금리 충격 시나리오는 점차 수렴하는 경향이 드러나며, 특히 λ 값이 작을수록 만기에 따른 금리의 변동이 크고, 시나리오별 차이가 두드러진다. 이러한 시나리오별 금리 곡선의 차이는 단기 만기 구간에서 증가하다가 장기 만기로 접어들수록 감소하여 수렴하는 형태를 보인다.

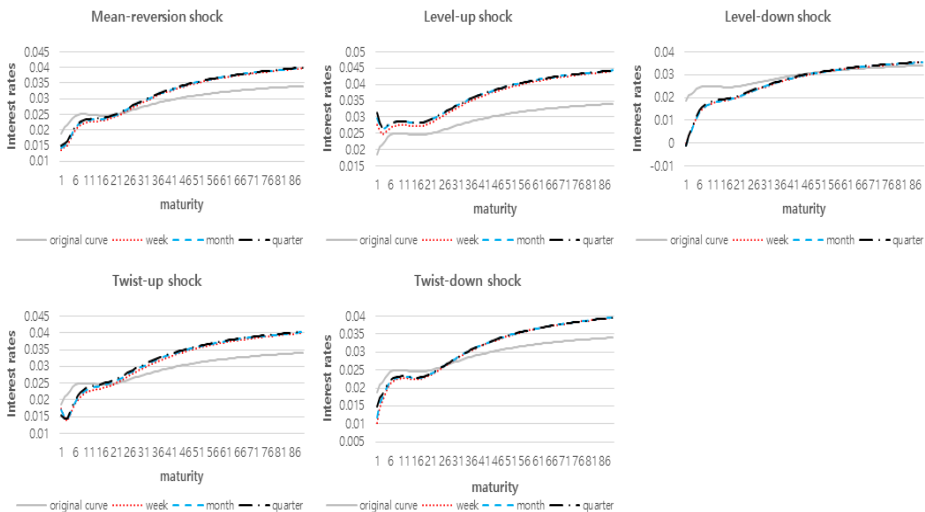
〈Figure 12〉 Interest Rate Shock Scenarios according to λ 

3. 데이터의 관찰 주기

기본 가정 시나리오에서는 주간 국채 데이터를 사용하였고, 이에 따라 l, s, c 시계열 생성, 충격량 생성 시나리오 모두 주간 데이터를 기반으로 진행되었다. 본 절에서는 주간 데이터 대신 월간 데이터, 분기 데이터를 사용하여 금리 충격 생성 시나리오가 어떤 차이가 있는지 살펴보고자 한다.

〈Figure 13〉은 데이터의 관찰 주기에 따른 금리 충격 생성 시나리오이다. 충격을 반영하기 이전의 이자율 곡선과 각 관찰 주기에 따른 금리 충격 생성 시나리오를 나타내고 있다. 금리 충격 시나리오의 종류와 무관하게 주간, 월간, 분기 간의 데이터로 생성한 시나리오들의 차이가 두드러지게 나타나지는 않는다. 그러나 데이터의 관찰 주기가 길어질수록 이자율 자체가 높은 값을 나타냈다. 만기가 짧을수록 데이터의 관찰 주기에 따른 금리 충격 시나리오들의 이자율 차이는 커지며, 최소 약 0.13% 포인트에서 최대 약 0.46% 포인트까지의 차이를 보였다. 이는 작은 수치의 차이지만 큰 규모의 부채에 관한 할인을 산정에서는 유의미한 차이를 생길 수 있기 때문에 빈도가 더 높은 데이터를 활용하는 것이 중요할 수 있다.

〈Figure 13〉 Interest Rate Shock Scenarios according to the Time Interval of Data



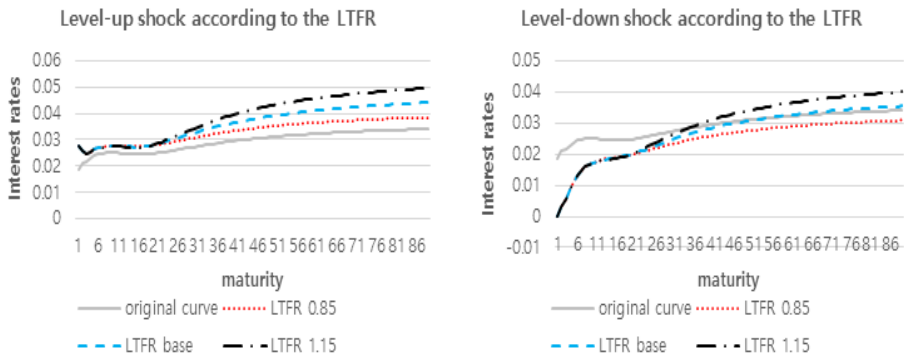
4. 장기선도금리

본 절에서는 LTFR 값에 따라 금리 충격 시나리오가 어떠한 영향을 받는지를 살펴본다. LTFR 값은 현물수익률 곡선의 segment 2와 segment 3 구간에 영향을 주는 값이다. 따라서 LTFR은 segment 1 구간의 이자율을 사용하는 l, s, c 시계열 생성 과정에는 영향을 주지 않지만, 충격 시나리오에는 영향을 미친다.

전체 만기기간에 대해 현물수익률 곡선을 산출하기 위해서는 각각의 segment 1, segment 2, segment 3 구간에 대한 현물 수익률을 계산해야 한다. segment 1에서의 현물수익률은 시장에서 거래되고 있는 이자율 기반 금융상품을 통해 구할 수 있으며, segment 3의 현물수익률은 장기적으로 이자율이 수렴하는 선도이자율 값을 사용한다. segment 2에서의 현물수익률은 segment 1과 segment 2의 이자율을 이용해 Smith-Wilson 방법을 통해 보외법으로 추정한다. 따라서 장기적으로 이자율이 수렴하는 선도이자율 값이 어떻게 정해지느냐에 따라 전체 현물수익률 곡선 또한 영향을 받는다. 이 값은 일반적으로 LTFR을 사용한다.

본 절에서는 <Table 1>에 정리된 기본 가정 LTFR 중에서 수증상충격과 수증하강충격 시나리오의 LTFR에 대하여 0.85배, 1.15배한 LTFR 값을 사용한 금리 충격 시나리오를 생성하고, 이를 <Figure 14>에 비교·분석하였다. LTFR 수준에 따라 만기 20년 이후인 Segment 2, 3에서 차이가 발생함을 알 수 있다.

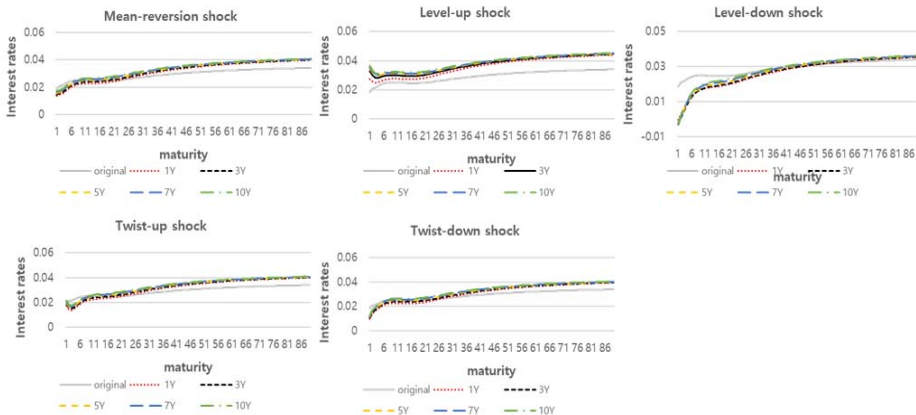
<Figure 14> Interest Rate Shock Scenarios according to the Long-term Forward Rate



5. 금리 충격 발생 이후 관찰 시점

기본 시나리오에서는 금리 충격 발생 후 1년 뒤 현물 수익률 곡선이 어떻게 변했는지 살펴보았던 반면, 본 절에서는 금리 충격 발생 이후 현물 수익률 곡선을 관찰하는 시점을 변경하여 시나리오에 따라 어떤 차이가 나타나는지 분석하였다. <Figure 15>는 각 충격 시나리오에 대하여 관찰 시점을 달리한 결과를 정리하고 있다. 이는 금리 충격이 발생한 직후뿐만 아니라 3년, 5년, 7년, 10년 후 이자율 기간 구조에 미치는 영향을 살펴 보기 위함이다. 수준상승충격 시나리오가 다른 시나리오 비해 단기 만기에서 관찰 시점에 따른 이자율의 변화가 상대적으로 크다. 하지만, 관찰시점의 변화는 다른 민감도 분석에 비하여 이자율 기간 구조에 미치는 영향은 작게 나타난다.

<Figure 15> Comparison of the Interest Rate Shock Scenarios according to the Observation Time after Shock Generations



6. 스왑 금리

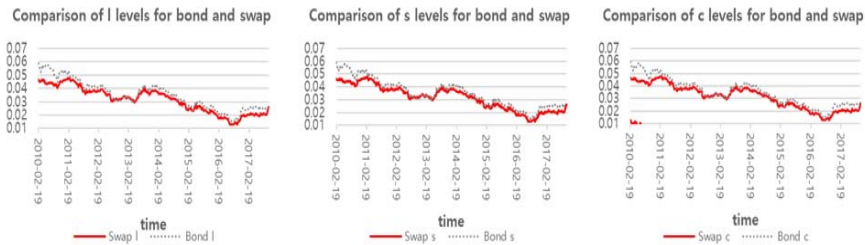
기본 가정 시나리오에서는 현물수익률 곡선 산출 과정에서 국채 금리를 사용하였다. 본 절에서는 국채 대신 스왑 금리를 사용하여 금리 충격 시나리오를 산출하고, 국채와 어떤 차이가 있는지 살펴볼 것이다. 분석에 사용된 데이터는 2010년 2월부터 2017년 10월까지의 금리스왑(IRS; Interest Rate Swap)의 데이터로 1년, 1.5년, 2년, 3년, 4년, 5년, 7

년, 10년, 20년 만기를 사용하였다.

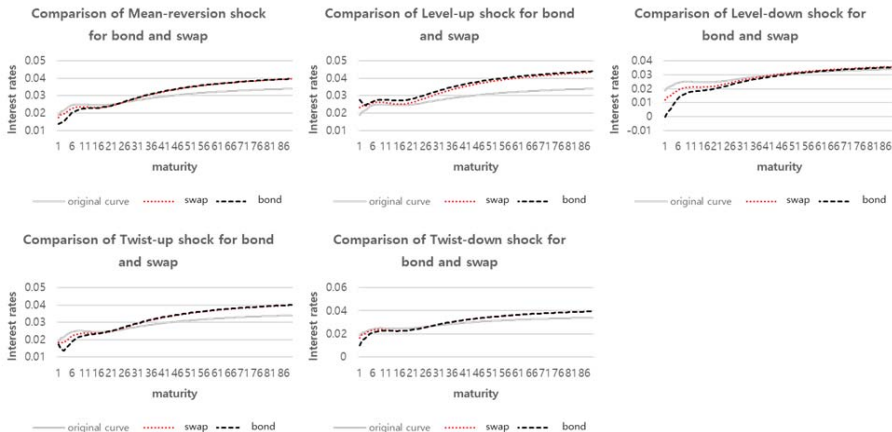
〈Figure 16〉은 스왑 데이터를 사용해 추정한 l, s, c 시계열이다. 동일한 기간에 대해 비교하면 국채 데이터와 스왑데이터의 l, s 시계열은 개형은 비슷하나 값의 크기가 차이를 보인다. 반면 곡률 요인 c 에서는 국채와 스왑의 시계열 개형 차이가 크게 나타났다.

〈Figure 17〉는 국채 데이터와 스왑 데이터를 사용하여 각각 금리 충격 시나리오를 생성한 결과를 나타낸다. 국채와 스왑의 차이는 만기가 짧을수록 크게 나타나며 수준하강충격의 경우 스왑이 국채보다 최대 1.2%p 작게 생성되었다. 금리 충격 시나리오 생성 목적에 따라 시나리오 생성에 사용할 금융 자산을 적절하게 선택하는 것 또한 매우 중요한 문제임을 알 수 있다.

〈Figure 16〉 l, s, c Time Series Comparison between Bond Data and Swap Data



〈Figure 17〉 The Comparison of Shock Scenarios between Bond Data and Swap Data



Ⅳ. 주성분분석을 사용한 금리 충격 시나리오

본 장에서는 PCA를 통해 금리를 분석하고, 이를 이용하여 금리 충격 시나리오를 생성한다. PCA를 활용한 금리 충격 시나리오 생성이 DNS 모형을 활용한 금리 충격 시나리오와 어떤 차이가 있는지 살펴본다.

PCA는 상관관계가 높은 여러 변수들을 상호독립적인 변수(주성분)으로 분해하는 통계적인 방법이다(Johnson, R., and D., Wichern, 2002). 이를 통해 고차원 데이터를 저차원으로 환원시켜 복잡한 데이터 집합으로부터 숨겨진 간단한 구조를 밝혀낼 수 있다.

분석하고자 하는 데이터 집합을 행렬로 나타낼 때, 주성분은 원래 성분들의 선형결합으로 나타난다. 이때 공분산 행렬의 고유벡터가 선형결합의 계수 벡터가 되며, 고유치의 합이 원래 성분들의 분산의 합과 같다. 따라서 고유치에 대한 비율이 주성분의 데이터에 대한 설명력을 나타낸다.

금리의 경우 같은 시점의 값이라도 다양한 만기를 가지며 만기에 따라 금리가 다르게 나타난다. 더욱이 만기별 금리의 상호상관성은 매우 높아 주성분 분석을 사용하기 적합한 대상이라고 할 수 있다. 모든 만기를 포괄하여 금리리스크를 측정하고자 할 때, 금리 데이터를 독립적인 요소(주성분)로 분해 및 축소하는 것이 주성분 분석을 활용한 금리리스크 분석이다. 이를 통해 몇 가지 요소를 통해 수많은 만기의 금리에 대한 리스크를 효율적으로 설명할 수 있다. 일반적으로 금리리스크에 대한 주성분 분석을 할 때, 첫 번째 성분은 수준(Level), 두 번째는 기울기(Slope), 세 번째는 곡률(Curvature)을 나타내는 것으로 알려져 있다.

본 연구에서는 주성분 분석을 통해 금리리스크를 분석하고, 나아가 선택된 주성분을 이용하여 일정 신뢰수준에 해당하는 금리 충격량을 산출한다.

1. 주성분분석

금리 벡터 시계열 R_t 이 주어졌다고 가정하자. R_t 는 $m \times 1$ 벡터로 t 시점에서 관찰한 m 개의 만기에 대한 금리를 원소로 가진다. 벡터 시계열을 관찰할 시점은 $\{t_i\}, i = 1, \dots, n$

으로 표기하며, 각 시점의 간격은 Δt 와 같다.

금리의 움직임을 결정짓는 확률변수 $s(\cdot)$ 가 다음과 같이 주어져있다고 가정하자:

$$s(Z_{t+1}; \Delta t) := \mu \Delta t + \text{chol}(\Sigma) \sqrt{\Delta t} Z_{t+1}. \quad (27)$$

이때 확률변수 $s(\cdot)$ 는 $m \times 1$ 벡터이며, 금리 벡터 시계열 R_t 와 독립적으로 결정되는 충격 Z_{t+1} 에 의존하는 확률변수이다. Z_{t+1} 은 t 시점에서 $t+1$ 시점으로 진행될 때의 변동을 의미한다. μ 는 연율화된 평균 벡터, Σ 는 연율화된 공분산행렬을 의미하며, $\text{chol}(\Sigma)$ 은 Σ 의 콜레스키 분해로 계산되는 하방삼각행렬로 $\Sigma = \text{chol}(\Sigma) \text{chol}(\Sigma)^T$ 를 만족한다. 금리의 움직임을 확률변수 $s(\cdot)$ 와 연관 짓는 규칙을 $f(R_t, s_t)$ 이라고 할 때, $f(R_t, s_t)$ 은 다음 관계식을 만족한다:

$$R_{t+1} = f(R_t, s_t) \quad (28)$$

주어진 만기에 대한 현물금리의 절대적인 움직임을 모형화할 것인지(절대충격방식), 상대적인 움직임을 모형화할 것인지(상대충격방식)에 따라 다른 $f(R_t, s_t)$ 를 적절히 가정하여 모형화할 수 있다.

절대충격방식

$$\begin{aligned} R_{t+1} - R_t &= s(Z_{t+1}; \Delta t), \\ R_{t+1} &= f(R_t, s(Z_{t+1}; \Delta t)) = R_t + s(Z_{t+1}; \Delta t). \end{aligned} \quad (29)$$

상대충격방식

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{R_{t+1}}{R_t}\right) &= s(Z_{t+1}; \Delta t), \\ R_{t+1} &= f(R_t, s(Z_{t+1}; \Delta t)) = R_t \cdot \exp(s(Z_{t+1}; \Delta t)). \end{aligned} \quad (30)$$

따라서 금리 모형은 금리의 움직임을 확률변수 s 와 연관 짓는 규칙 f , 그리고 s 의 평균

μ , 공분산행렬 Σ 으로 완전히 결정되며, 금리 모형을 (f, μ, Σ) 으로 표현가능하다. 따라서 f 가 주어졌을 때, 모형을 사용하기 위해서는 우선 μ 와 Σ 를 추정해야 한다. 벡터 시계열 R_t 에 대하여 R_{t+1} 과 확률변수 s 의 관계식 (29) 또는 식(30)을 이용하여 확률변수를 역산할 수 있다. 이렇게 얻은 s 의 평균으로 μ 의 추정치 $\hat{\mu}$ 을 얻고, 이를 바탕으로 공분산행렬의 추정치 $\hat{\Sigma}$ 를 계산한다.

행렬 S 를 각 만기에 대한 확률변수 $s(\cdot)$ 를 열로 가진 $m \times n$ 행렬로 정의한다. 이때 m 은 관찰할 금리 만기의 수를 의미하며, n 은 금리를 관찰할 시점의 수를 의미한다. 즉, 행렬 S 의 j 번째 열은 j 번째 시점의 확률변수 벡터이며, 금리 벡터 시계열 R_t 을 통해 역산될 수 있다.

주성분 분석을 위해서는 공분산 행렬을 먼저 구해야 하며, 이를 위해 우선 행렬 S 의 각 행의 평균을 구해야 한다.¹²⁾ 각 행에 대해 평균값을 구하고 이를 원소로 가지는 $m \times 1$ 벡터를 u 라고 할 때, 이렇게 계산한 u 를 통해 확률변수 s 의 모수인 μ 의 추정치를 얻을 수 있다:

$$u_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{i,j}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (31)$$

$$\hat{\mu} = u / \Delta t.$$

행렬 S 를 평균중심화한 행렬을 $\bar{S}$ 라고 정의하자. $\bar{S}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다¹³⁾:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= S - uh, \\ h_j &= 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (32)$$

이때 h 는 모든 원소가 1인 $1 \times n$ 벡터이다. $m \times m$ 크기의 공분산 행렬 $\hat{\Sigma}$ 는 다음과 같다:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \bar{S} \cdot \bar{S}^T / \Delta t. \quad (33)$$

공분산 행렬 $\hat{\Sigma}$ 의 고유값과 고유벡터를 구함으로써 금리리스크에 대한 설명력이 높은 주성분을 구할 수 있다.

12) 이는 각 만기의 금리에 대해 확률변수의 평균을 구하는 것이며, 모수 벡터 μ 의 원소를 추정하는 것이다.

13) 평균중심화란 평균을 0으로 만드는 것을 의미한다.

2. 주성분분석을 사용한 금리 충격 시나리오 생성

본 연구에서는 금리 충격 시나리오를 생성하기 위해 우선 주성분분석을 통해 국채 데이터로부터 주성분을 선택하고, 만기별 금리가 정규분포를 따른다는 가정하에 해당 주성분에 대한 신뢰도 99.5%의 충격량을 산출할 것이다. 이때 충격량 산출 방식은 이자율의 절대적인 차이로 생성하는 절대 충격량 방식과 로그이자율의 차이로 생성하는 상대 충격량 방식으로 구분할 수 있다. 4.2.2절에서는 절대 충격량 방식에 따른 금리 충격 시나리오를 산출하고, 4.2.3절에서는 상대 충격량 방식에 따른 금리 충격 시나리오를 산출하여 두 방식의 차이를 비교할 것이다.

금리의 움직임은 확률변수 $s(\cdot)$ 에 의존하기 때문에 s 의 충격 시나리오를 생성한 후, 이를 통해 금리 충격 시나리오를 계산한다. 충격 시나리오 $s^\pm$ 는 주성분분석을 통해 얻은 주성분을 활용하여 신뢰수준 99.5% VaR로 측정되며 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$s^\pm = s(\pm v \Phi^{-1}(0.995); \Delta T). \quad (34)$$

이때 v 는 주성분분석에서 산출된 고유값에 대응하는 고유벡터를 의미한다.¹⁴⁾ t_0 시점의 금리 기간구조가 주어졌을 때, $t_0 + \Delta T$ 시점의 $s^\pm$ 에 대응하는 금리 충격 시나리오는 다음과 같이 주어진다:

$$R_{t_0 + \Delta T|t_0}^\pm = f(R_{t_0}, s^\pm) = f(R_{t_0}, s(\pm v \Phi^{-1}(0.995); \Delta T)). \quad (35)$$

가. 데이터

주성분분석을 사용한 충격 시나리오와 DNS 모형을 사용한 충격 시나리오를 비교·분석하기 위해 각 시나리오 산출에 사용된 금리 데이터는 동일하다. 금융투자협회 채권정보센터의 국채 수익률 데이터를 활용하였으며, 사용된 국채의 만기는 1년, 2년, 3년, 4년, 5년,

14) 고유벡터의 방향에 따라 금리의 증감이 결정되기 때문에 $R_{t_0 + \Delta T|t_0}^+$ 와 $R_{t_0 + \Delta T|t_0}^-$ 가 각각 상승 시나리오, 하강 시나리오를 의미하는 것은 아니다. 상승 시나리오와 하강 시나리오는 $R_{t_0 + \Delta T|t_0}^+$ 와 $R_{t_0 + \Delta T|t_0}^-$ 중에서 각각 평균값이 더 높은 것과 낮은 것으로 정의한다.

7년, 10년, 그리고 20년이다. 사용된 데이터는 2007년 1월부터 2017년 12월까지 주 단위 데이터이다.

나. 금리 충격 시나리오 산출 결과(절대충격방식)

Step 1. 공분산행렬 생성

주성분분석을 위해서는 각 만기별 금리의 공분산행렬을 구해야 한다. 공분산행렬을 구하는 방법은 앞 절에서 서술한 바와 같으며, 우선 데이터의 평균중심화를 진행해야 한다. 만기별 국고채의 통계량은 <Table 4>에 제시한다.

<Table 4> Bond Statistics according to Maturity

Statistics	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y	20Y
Average	0.0293	0.0312	0.032	0.0331	0.0344	0.0362	0.0375	0.039
Median	0.0269	0.0296	0.0311	0.0326	0.0337	0.0353	0.0369	0.0388
Standard deviation	0.0122	0.0126	0.0126	0.0127	0.0129	0.013	0.013	0.0131
Maximum	0.0566	0.061	0.0608	0.0606	0.061	0.0613	0.061	0.0609
Minimum	0.0125	0.0123	0.012	0.0121	0.0123	0.0132	0.0138	0.0146

식 (32), 식 (33)에 따라서 공분산행렬 $\hat{\Sigma}$ 를 구할 수 있다. 이를 좀 더 직관적으로 볼 수 있도록 상관계수행렬로 전환한 것이 <Table 5>이다. 각 만기별 이자율의 상관계수가 1에 가까워 상관성이 높음을 알 수 있다.

〈Table 5〉 Correlation for Each Maturity – Absolute Shock

Maturity	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y	20Y
1Y	1	0.8818	0.752	0.6644	0.6201	0.5798	0.547	0.5128
2Y	0.8818	1	0.8709	0.7937	0.7655	0.7264	0.676	0.6508
3Y	0.752	0.8709	1	0.9693	0.9175	0.8516	0.7907	0.7627
4Y	0.6644	0.7937	0.9693	1	0.9706	0.9098	0.8364	0.8118
5Y	0.6201	0.7655	0.9175	0.9706	1	0.9735	0.8844	0.8611
7Y	0.5798	0.7264	0.8516	0.9098	0.9735	1	0.9544	0.9184
10Y	0.547	0.676	0.7907	0.8364	0.8844	0.9544	1	0.9549
20Y	0.5128	0.6508	0.7627	0.8118	0.8611	0.9184	0.9549	1

Step 2. 고유값 및 고유벡터 생성 및 주성분 선택

특이값 분해(Singular Vector Decomposition)을 통해 공분산행렬 $\hat{\Sigma}$ 의 고유값 및 고유벡터를 찾을 수 있다. 각 성분별 고유값은 〈Table 6〉에, 고유벡터는 〈Table 7〉에 나타나 있다.

공분산행렬의 고유값의 합은 원래 변수들의 분산의 합과 동일하다. 따라서 각 주성분 고유값의 크기의 전체 합에 대한 비율이 각 주성분에 대한 설명력을 나타낸다. 〈Table 6〉에 성분별 고유값이 나타나 있으며 고유값의 크기에 따라 주성분이 정렬되어 있다. 이를 살펴 보면 첫 번째 고유값의 비율이 82.95%로 나타나, 제 1 주성분이 금리 움직임에 대한 대부분을 설명하고 있음을 알 수 있다. 두 번째, 세 번째 고유값의 비율은 각각 10.64%, 3.59%로 세 주성분이 전체 금리 분산의 97.18%를 설명한다.

〈Table 6〉 Eigen Value for Each Component – Absolute Shock

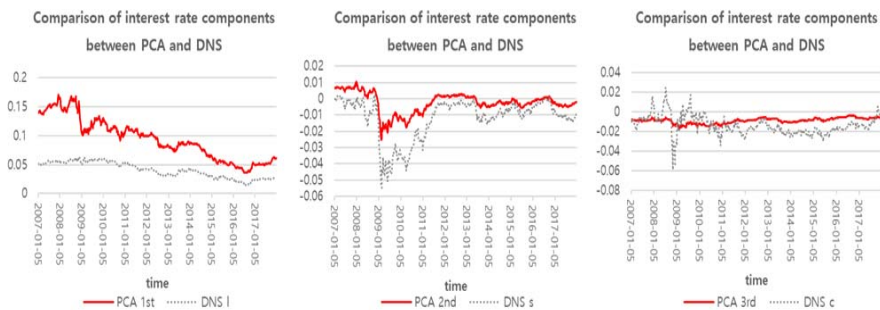
Component	Eigen value	Ratio	Commulative ratio
1	6.6358	0.8295	0.8295
2	0.8514	0.1064	0.9359
3	0.2871	0.0359	0.9718
4	0.0953	0.0119	0.9837
5	0.0776	0.0097	0.9934
6	0.0424	0.0053	0.9987
7	0.0104	0.0013	1
8	0	0	1

〈Table 7〉 Eigen Vector – Absolute Shock

Maturity	Component 1	Component 2	Component 3	Component 4	Component 5	Component 6	Component 7	Component 8
1Y	-0.2916	-0.6529	0.3741	-0.5762	-0.1086	-0.0694	0.0109	0.0001
2Y	-0.3369	-0.466	0.1211	0.7118	0.3479	-0.0277	-0.1623	0.0005
3Y	-0.3692	-0.1576	-0.4124	0.1605	-0.4508	0.2783	0.6011	-0.0318
4Y	-0.3728	0.0242	-0.4826	-0.1155	-0.2401	-0.0333	-0.6704	0.3256
5Y	-0.3753	0.1468	-0.3145	-0.2094	0.3623	-0.3242	0.0343	-0.6762
7Y	-0.3711	0.2647	0.0268	-0.1882	0.5265	0.0053	0.3345	0.6057
10Y	-0.3564	0.3303	0.3842	-0.0303	-0.0185	0.7077	-0.216	-0.2599
20Y	-0.3473	0.3612	0.4418	0.2052	-0.4444	-0.5567	0.0559	0.0338

세 주성분이 만기에 따라 어떤 값을 가지는지 그려보면 각각의 성분이 어떠한 특성을 지니고 있는지 알 수 있다. 〈Figure 18〉은 PCA 방법을 통해 얻은 세 성분과 앞서 구한 DNS 모형의 세 요인 l, s, c 의 시계열을 비교한 그래프이다.¹⁵⁾ PCA 제 1 주성분과 DNS 모형의 l , PCA 제 2 주성분과 DNS 모형의 s 가 서로 대응되고 있음을 알 수 있다. 세 쌍의 시계열들의 상관계수는 각각 0.931, 0.929, 0.115로 PCA 제 3 주성분을 제외하고는 DNS 모형과 PCA 방법이 결과적으로 매우 상관성이 높다는 것을 알 수 있다.

〈Figure 18〉 Comparison of Interest Rate Components between PCA and DNS (Absolute Shock)



15) PCA의 각 성분은 대응되는 고유 벡터에 주어진 금리 시계열 매트릭스를 곱하면 얻을 수 있다. 이때 DNS와의 비교의 용이함을 위해 PCA 주성분 시계열을 생성할 때 고유벡터에 -1을 곱하여 구하였다.

PCA에서는 다양한 주성분 중에서 통계적으로 설명력이 높은 주성분만을 선택함으로써 복잡한 데이터 구조를 간단하고 효율적으로 파악할 수 있다. 따라서 성분별 고유값의 비율이 높은 순서대로 세 주성분을 선택하여 금리 충격 시나리오를 생성한다.

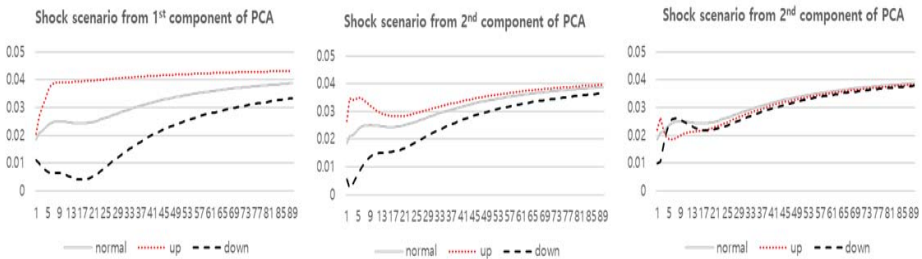
Step 3. 금리 충격 시나리오 생성

만기별 금리변화율을 정규분포로 가정하면 신뢰수준에 따라 금리 충격량을 산출할 수 있다. i 번째 주성분에 대한 신뢰수준 99.5%의 충격량 $shock_i$ 는 다음과 같다:

$$shock_i = \pm \sqrt{\lambda_1} e_{i1} \sqrt{52} \sigma_i \Phi^{-1}(0.995). \quad (36)$$

이때, λ_1 은 첫 번째 주성분, e_{i1} 은 첫 번째 주성분의 고유벡터, σ_i 는 i 번째 만기 국채의 표준편차를 나타낸다. 산출된 충격량을 바탕으로 무위험수익률 곡선에 충격량을 반영한 수익률 곡선을 산출하였으며, 이는 <Figure 19>와 같다.

<Figure 19> Comparison of Interest Shock Scenarios(Absolute Shock)



다. 금리 충격 시나리오 산출 결과(상대충격방식)

4.2.2에서는 이자율의 직접적인 차이를 통해 생성한 절대 충격량으로 충격 시나리오를 산출한 반면, ICS에서는 이자율 대신 로그이자율을 사용하여 상대적인 충격량을 산출하였다. 본 절에서는 상대 충격량 방식에 따른 금리 충격 시나리오를 산출하고, 두 충격량 산출 방식의 차이를 분석하고자 한다.

상대 충격량 방식에서는 절대 충격량 방식과 비교해 주성분분석의 방법론은 동일하지만

금리 데이터 대신 로그를 취한 로그이자율을 사용한다. 따라서 각 만기별 이자율을 로그비를 사용해 나타내며, 로그비는 ICS와 동일하게 $\ln((1 + r_{t+1}) / (1 + r_t))$ 를 적용한다.

충격량 생성과정은 절대충격방식과 동일하다. <Table 8>는 상대충격방식을 사용했을 때 각 만기 금리의 상관계수를 나타내고 있으며, 절대충격방식과 유사하게 각 만기 금리의 상관성이 높게 나타난다.

<Table 8> Correlation for Each Maturity - Relative Shock

Maturity	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y	20Y
1Y	1	0.881	0.7498	0.6613	0.617	0.5767	0.5439	0.5097
2Y	0.881	1	0.87	0.7923	0.7639	0.7247	0.6742	0.6488
3Y	0.7498	0.87	1	0.9692	0.9171	0.8511	0.7903	0.7618
4Y	0.6613	0.7923	0.9692	1	0.9706	0.9099	0.8367	0.8116
5Y	0.617	0.7639	0.9171	0.9706	1	0.9735	0.8848	0.861
7Y	0.5767	0.7247	0.8511	0.9099	0.9735	1	0.9546	0.9182
10Y	0.5439	0.6742	0.7903	0.8367	0.8848	0.9546	1	0.9547
20Y	0.5097	0.6488	0.7618	0.8116	0.861	0.9182	0.9547	1

<Table 9>은 성분별 고유값을, <Table 10>은 고유벡터를 나타낸다. 상대충격방식에서도 고유값의 전체 합에 대한 비율로 각 주성분의 설명력을 알 수 있으며, 순서대로 나열했을 때 상위 세 주성분이 누적비율 97.17%를 차지한다.

<Table 9> Eigen Value for Each Component - Relative Shock

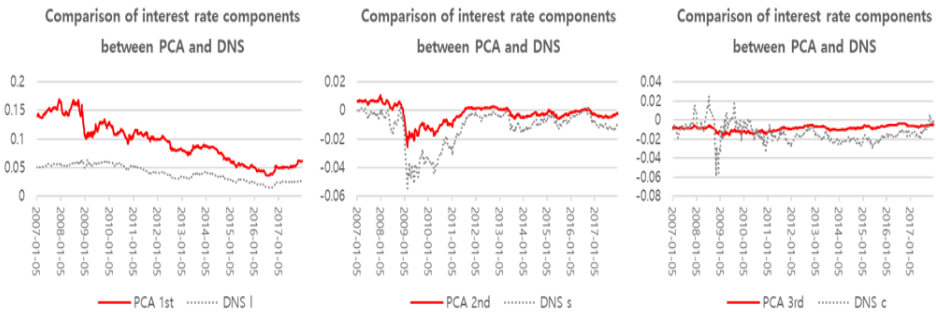
Component	Eigen value	Ratio	Cummulative ratio
1	6.6291	0.8286	0.8286
2	0.8569	0.1072	0.9358
3	0.2877	0.0359	0.9717
4	0.0957	0.012	0.9837
5	0.0777	0.0097	0.9934
6	0.0425	0.0053	0.9987
7	0.0104	0.0013	1
8	0	0	1

〈Table 10〉 Eigen Vector – Relative Shock

Maturity	Component 1	Component 2	Component 3	Component 4	Component 5	Component 6	Component 7	Component 8
1Y	-0.2908	-0.6539	0.3738	-0.5762	-0.1067	-0.0683	0.0107	0.0001
2Y	-0.3366	-0.4667	0.119	0.7134	0.3446	-0.0288	-0.1619	0.0005
3Y	-0.3693	-0.157	-0.4139	0.1575	-0.4514	0.2797	0.5998	-0.0317
4Y	-0.373	0.0255	-0.4821	-0.1175	-0.2385	-0.0345	-0.6711	0.3249
5Y	-0.3754	0.1473	-0.3127	-0.2085	0.3628	-0.3265	0.036	-0.6757
7Y	-0.3713	0.2641	0.0282	-0.1857	0.5265	0.0046	0.3349	0.6064
10Y	-0.3566	0.3291	0.3836	-0.0297	-0.0158	0.708	-0.2167	-0.2606
20Y	-0.3474	0.3599	0.4434	0.2041	-0.4473	-0.5542	0.0563	0.0339

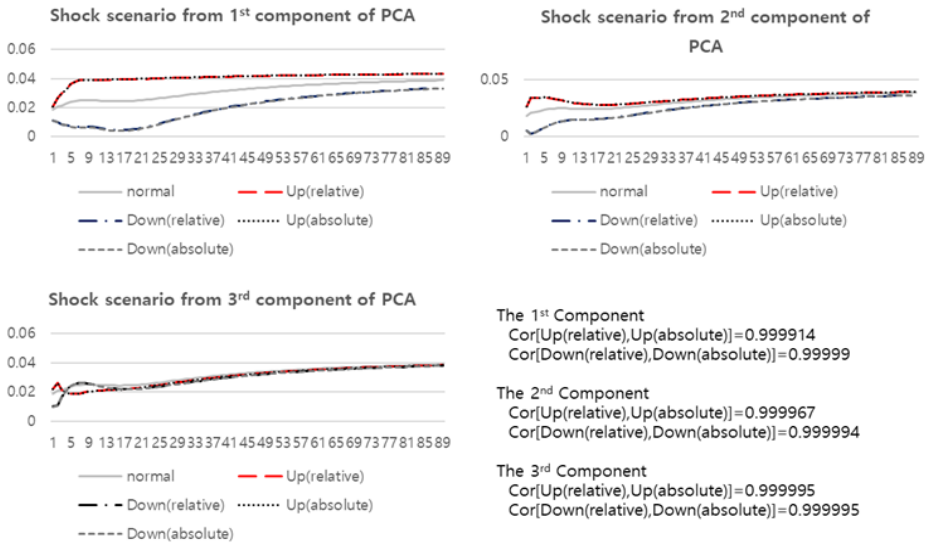
〈Figure 20〉은 상대충격방식에 따른 PCA의 세 주성분과 DNS 모형의 세 요인을 비교한 그래프로 PCA 주성분과 DNS 모형의 요인들이 대응되고 있다. 각 시계열 쌍의 상관계수가 0.931, 0.927, 0.112으로 절대충격방식의 결과와 크게 다르지 않다.

〈Figure 20〉 Comparison of Interest Rate Components between PCA and DNS (Relative Shock)



〈Figure 21〉은 상대충격방식과 절대충격방식으로 생성한 금리 충격 시나리오를 비교하는 그림이다. 두 충격방식의 금리 충격 시나리오는 차이가 거의 나타나지 않으며 각 충격 시나리오의 금리 시계열 상관성은 1에 가깝게 나왔다.

〈Figure 21〉 Comparison of Interest Shock Scenarios(Absolute Shock and Relative Shock)



V. 결론

본 연구는 DNS 모형을 바탕으로 금리 충격 시나리오를 생성하여 금리 충격이 발생했을 때 이자율 곡선에 미치는 영향을 분석한다. 금리 충격의 종류에 따라 평균회귀충격, 수준 상승충격, 수준하강충격, 비틀림상승충격, 비틀림하강충격의 다섯 종류의 금리 충격 시나리오를 생성하였으며, 이러한 금리 충격들은 이자율 곡선의 각기 다른 형태를 보여준다.

금리 충격 시나리오 생성과정에서 전제된 다양한 가정과 모수들에 대해 민감도 분석을 수행하였다. 사용하는 금융 자산의 종류, 데이터 기간, 단기 만기 이율 사용여부, DNS 모형의 곡률 요인에 관한 모수, 장기선도금리, 금리충격 관찰 시점 등에 대하여 민감도 분석을 하여 가정별로 금리 충격 시나리오에 어떠한 영향을 주는지 보여주었다. 각 가정들은 절대적인 이자율 수치 자체에 크게 영향을 주지는 않지만, 이자율의 사용 목적에 따라 작은 수치의 변화만으로도 큰 의미를 가질 수 있기에 금리 충격 시나리오의 생성 목적에 따라 적절한 가정을 수립하는 것이 중요하다.

또한 PCA를 이용한 금리 충격 시나리오가 DNS 모형과 어떤 차이점이 있는지 비교하였

다. PCA의 제 1주성분과 제 2 주성분이 각각 DNS 모형의 수준요인 l 및 기울기 요인 s 와 높은 상관관계를 나타냈다. PCA 방법을 통한 충격 생성 시나리오가 각 요인의 변동으로 인해 금리 곡선이 직접적으로 변동하는 반면, DNS 모형을 통한 충격 생성 시나리오는 각 요인의 변동에 금리 충격량이 결정되어 금리 충격이 생성되는 상대적으로 간접적인 매커니즘을 가진다. DNS의 경우 세 요인을 통해 간접적으로 다양한 종류의 금리 충격 시나리오가 생성되기 때문에 DNS 모형이 세분화된 위험 관리의 측면에서는 우수함을 실증적으로 알 수 있다.

일반적으로 자산보다 부채 만기가 더 긴 보험회사, 특히 생명보험회사의 특성상 금리리스크는 지급여력비율에 많은 영향을 미친다. 금리리스크에 대한 다양한 분석과 비교를 통해 국내 환경에 적합한 모형을 선정하는 것이 필요할 것이다.

참고문헌

- 노건엽·장봉규·태현욱 (2016), “보험부채 공정가치 평가목적 할인율에 관한 연구”, **보험학회지**, 제107집, 한국보험학회, pp. 75-108.
- (Translated in English) Noh, G., B., Jang, and H., Tae (2016). “A Study on Discount Rates for Fair Valuation of Insurance Liabilities.”, *Korean Insurance Journal*, 107: 75-108.
- 노건엽 (2018), “주성분 분석을 이용한 보험사 금리리스크 측정”, **계리학연구**, 제10권 제2호, 한국계리학회, pp. 3-36.
- (Translated in English) Noh, G. (2018). “Interest Risk Measurement of Insurance Company using Principal Component Analysis”, *The Journal of Actuarial Science*, 10(2): 3-36.
- 임준환·최장훈·한성원 (2018), **생명보험산업의 금리위험 평가**, 보험연구원.
- (Translated in English) Im, J., J., Choi, and S., Han (2018). *Assessment on Domestic Life Insurers' Liability: A Interest rate Sensitivity(Duration) Approach*, KIRI.
- Charpentier, A., and C., Villa (2010). *Generating Yield Curve Stress-scenarios*(<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00550582>).
- Dattalo, P. (2013). *Analysis of Multiple Dependent Variables*, Oxford University Press.
- Diebold, F., and C., Li (2006). “Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields”, *Journal of econometrics*, 130(2): 337-364.
- Diebold, F., C., Li, and V., Yue (2008). “Global Yield Curve Dynamics and Interactions: a Dynamic Nelson-Siegel Approach”, *Journal of Econometrics*, 146(2): 351-363.
- EIOPA (2014). *Technical Specification for the Preparatory Phase Part II*.

- Ezequiel U. (2013). *The Simple Regression Model: Estimation and Properties*.
- IAIS (2016). *Instruction for the May 2016 Quantitative Data Collection Exercise*.
- ____ (2017). *Instruction for the May 2017 Quantitative Data Collection Exercise*.
- ____ (2018). *Instruction for the May 2018 Quantitative Data Collection Exercise of the Field Testing Project*.
- Johnson, R., and D., Wichern (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Pearson Education.
- Karatzas, I., and S., Shreve (2012). *Brownian Motion and Stochastic Calculus(Vol. 113)*, Springer Science and Business Media.
- Nelson, C., and A., Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *Journal of business* : 473-489.

Appendices

본 장에서는 l_t, s_t, c_t 시계열 및 모형의 모수 추정 방법에 대해 추가적으로 서술하고 그 결과를 비교한다. 즉, DNS 모형을 바탕으로 금리 충격 시나리오를 생성하여 금리 충격이 발생했을 때 모수 추정방법에 따라 이자율 곡선에 어떠한 영향을 주는지를 살펴본다.

금리 충격 시나리오를 생성하기 위해서 식 (2)와 (5)에 따라 l_t, s_t, c_t 시계열을 우선 추정하고, 이를 바탕으로 l_t, s_t, c_t 모형의 모수를 추정하였다. 이때 l_t, s_t, c_t 모형이 대각 행렬에 의해 결정된다고 가정하였으며, 각 요인의 상대적인 비중을 결정하는 모수인 λ 가 주어졌다고 가정한다. 본 절에서는 먼저 l_t, s_t, c_t 모형이 대각행렬이 아니라 전체 행렬을 이용할 때의 추정 방법 및 결과와 상대적인 비중을 결정하는 모수인 λ 가 주어지지 않고 추정해야할 때의 방법 및 결과가 각각 어떻게 다른지 분석한다. 우선 각 추정 방식이 어떻게 진행되는지 살펴보고 최종적으로 각 추정 방식에 따라 결과가 어떻게 달라지는지 비교한다.

가. 전체행렬

l_t, s_t, c_t 모형에서 대각행렬을 가정하지 않을 경우 식 (6) ~ (10)은 다음과 같이 수정된다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta l_{t_n} \\ \Delta s_{t_n} \\ \Delta c_{t_n} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \Delta l_n \\ \Delta s_n \\ \Delta c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{n+1} - l_n \\ s_{n+1} - s_n \\ c_{n+1} - c_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \kappa_{11}^P & \kappa_{12}^P & \kappa_{13}^P \\ \kappa_{21}^P & \kappa_{22}^P & \kappa_{23}^P \\ \kappa_{31}^P & \kappa_{32}^P & \kappa_{33}^P \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_n \\ s_n \\ c_n \end{bmatrix} \right) \Delta_n + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \sqrt{\Delta_n} \begin{bmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \\ Z_{3,n+1} \end{bmatrix}, \quad (6') \\
 \Leftrightarrow \Delta X_{t_n} &:= \Delta X_n = K(\Theta - X_n)\Delta_n + \Sigma \sqrt{\Delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Delta l_n = \beta_{1,1} + \beta_{1,2}l_n + \beta_{1,3}s_n + \beta_{1,4}c_n + \epsilon_{1,n+1} \\ \Delta s_n = \beta_{2,1} + \beta_{2,2}l_n + \beta_{2,3}s_n + \beta_{2,4}c_n + \epsilon_{2,n+1}, \\ \Delta c_n = \beta_{3,1} + \beta_{3,2}l_n + \beta_{3,3}s_n + \beta_{3,4}c_n + \epsilon_{3,n+1} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} Y_{1,n} = \beta_{1,1} + \beta_1 \cdot X_n + \epsilon_{1,n+1} \\ Y_{2,n} = \beta_{2,1} + \beta_2 \cdot X_n + \epsilon_{2,n+1}. \\ Y_{3,n} = \beta_{3,1} + \beta_3 \cdot X_n + \epsilon_{3,n+1} \end{cases} \quad (7')$$

$$\begin{aligned} \text{이 때, } \beta_{1,1} &= \sum_{i=1}^3 \kappa_{1i}^P \theta_i^P \Delta_n, \quad \beta_{2,1} = \sum_{i=1}^3 \kappa_{2i}^P \theta_i^P \Delta_n, \quad \beta_{3,1} = \sum_{i=1}^3 \kappa_{3i}^P \theta_i^P \Delta_n, \\ \beta_j &= [\beta_{j,2} \beta_{j,3} \beta_{j,4}], \\ \beta_{j,2} &= -\kappa_{j1}^P \Delta_n, \quad \beta_{j,3} = -\kappa_{j2}^P \Delta_n, \quad \beta_{j,4} = -\kappa_{j3}^P \Delta_n, \quad j = 1, 2, 3 \\ \epsilon_{n+1} &:= [\epsilon_{1,n+1} \epsilon_{2,n+1} \epsilon_{3,n+1}]^T \sim MN(0_{3 \times 1}, \Omega), \quad \Omega = \Sigma \Sigma' \Delta_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\widehat{\beta}_{i,j}) &= \arg \min_{(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{i,3}, \beta_{i,4})} \sum_{n=1}^{N-1} (Y_{i,n} - \beta_{i,1} - \beta_i \cdot X_n)^2 \\ &= \arg \min_{(\beta_{i,j})} \sum_{n=1}^{N-1} (Y_{i,n} - \beta_{i,1} - \beta_{i,2}X_{1,n} - \beta_{i,3}X_{2,n} - \beta_{i,4}X_{3,n})^2. \end{aligned} \quad (8')$$

$$\begin{aligned} e &= \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,N-1} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,N-1} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & \dots & e_{3,N-1} \end{bmatrix}, \\ e_{1,n} &= Y_{1,n} - (\widehat{\beta}_{1,1} + \widehat{\beta}_1 \cdot X_{1,n}), \\ e_{2,n} &= Y_{2,n} - (\widehat{\beta}_{2,1} + \widehat{\beta}_2 \cdot X_{2,n}), \\ e_{3,n} &= Y_{3,n} - (\widehat{\beta}_{3,1} + \widehat{\beta}_3 \cdot X_{3,n}). \\ \widehat{\Omega} &= \frac{1}{N-3} e e'. \end{aligned} \quad (10')$$

이때 각 모수는 다음과 같이 추정될 수 있다:

$$\begin{aligned} \kappa_{ji}^P &= -\frac{\widehat{\beta}_{j,i+1}}{\Delta_n}, \\ \begin{bmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \kappa_{11}^P & \kappa_{12}^P & \kappa_{13}^P \\ \kappa_{21}^P & \kappa_{22}^P & \kappa_{23}^P \\ \kappa_{31}^P & \kappa_{32}^P & \kappa_{33}^P \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_{1,1} \\ \widehat{\beta}_{2,1} \\ \widehat{\beta}_{3,1} \end{bmatrix} \Delta_n^{-1}, \\ \widehat{\Sigma} &= chol(\widehat{\Omega}) / \sqrt{\Delta_n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11')$$

나. 모수 λ 를 추정해야 할 경우

본 연구에서는 l_t, s_t, c_t 모형에서 각 요인의 상대적인 비중을 결정하는 모수 λ 가 주어진다고 가정하여 분석을 진행하였다. 그러나 모수 λ 가 주어지지 않아 추정해야 할 경우에는 본 연구와 같이 추정 단계를 l_t, s_t, c_t 시계열 추정과 l_t, s_t, c_t 모형의 모수 추정의 두 단계로 분리하여 진행할 수 없게 된다. 따라서 본 절에서는 칼만필터(Kalman filter)를 바탕으로 우도함수 추정법(Maximum likelihood estimator)을 사용하여 l_t, s_t, c_t 시계열과 λ 를 포함한 모형의 모수를 한 번에 추정한다.

칼만 필터는 관측 가능한 변수와 이와 선형적인 관계를 가지고 있는 상태 변수가 존재하고, 상태변수가 이전 시점의 값과 선형적인 관계를 이루고 있는 경우 적용할 수 있다. DNS 모형에서는 관측 가능한 변수가 이자율 $y_t(\tau)$ 이며, 상태변수가 l_t, s_t, c_t 에 해당된다. t 시점에서 관찰할 수 있는 이자율은 각 만기 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ 에 대하여 $y_t(\tau_1), y_t(\tau_2), \dots, y_t(\tau_m)$ 이며 이를 벡터로 표현할 수 있다. 이를 식으로 표현하면 아래와 같다:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l_{n+1} \\ s_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \kappa_{11}^P \Delta_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_{22}^P \Delta_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \kappa_{33}^P \Delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ s_n \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{11}^P \Delta_n \theta_1^P \\ \kappa_{22}^P \Delta_n \theta_2^P \\ \kappa_{33}^P \Delta_n \theta_3^P \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \sqrt{\Delta_n} \begin{bmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \\ Z_{3,n+1} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow X_{n+1} &= FX_n + B + \Sigma \sqrt{\Delta_n} Z_n. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &:= l_n + s_n \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + c_n \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right). \\ \begin{bmatrix} y_n(\tau_1) \\ y_n(\tau_2) \\ \vdots \\ y_n(\tau_m) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 (1 - e^{-\lambda\tau_1})/\lambda\tau_1 & (1 - e^{-\lambda\tau_1})/\lambda\tau_1 - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 (1 - e^{-\lambda\tau_2})/\lambda\tau_2 & (1 - e^{-\lambda\tau_2})/\lambda\tau_2 - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 (1 - e^{-\lambda\tau_m})/\lambda\tau_m & (1 - e^{-\lambda\tau_m})/\lambda\tau_m - e^{-\lambda\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n \\ s_n \\ c_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow Y_n &= HX_n \end{aligned} \quad (38)$$

칼만필터는 식(20)과 식(21)을 바탕으로 예측과 업데이트를 반복하며 l_t, s_t, c_t 의 시계열을 추정하는 역할을 한다. 그러나 칼만필터 자체는 상태변수를 추정하기 위한 방법이며 주어진 모형의 모수를 바탕으로 상태변수를 예측할 뿐, 모수를 추정하는 기능을 할 수는 없다. 그러므로 우도함수 추정법에 따라 칼만필터의 우도를 최대화하는 모수를 추정하고, 그때의 모수를 바탕으로 l_t, s_t, c_t 의 시계열을 추정해야 한다. 이때, 본 모형에서 추정 오류가 정규 분포를 따른다고 가정하였으므로 최대 우도를 구하는 것은 최소자승법(Least square method)과 동일하다.

다. 각 추정방법의 비교

각 추정방법에 따른 모수 추정치는 <Appendix table 1>, <Appendix table 2>, <Appendix table 3>와 같다. 세 가지 추정 방법 각각에 의해 얻어진 l_t, s_t, c_t 시계열은 <Appendix figure 1>와 같으며 유사한 모습을 보여줌을 알 수 있다. 각 추정방법에 대한 비교는 모두 2007년 ~ 2017년 사이의 이자율의 분기 데이터를 사용하여 이루어졌다. 기본 모형과 전체행렬을 사용한 모형은 같은 λ 값을 사용하였으며 따라서 l_t, s_t, c_t 시계열 추정 단계까지는 같고 이후의 모수 추정 단계부터 차이를 보인다. 두 방법의 추정 오차는 최소자승법을 사용하였고 각각 0.0798, 0.0798의 값이 나와 유의미한 차이를 보이지 않는다.

칼만필터를 사용한 추정방법의 경우, 앞선 두 모형과 달리 l_t, s_t, c_t 시계열의 추정 오차를 최소화하는 것이 아니라 l_t, s_t, c_t 시계열을 바탕으로 계산되는 이자율 $y_t(\tau)$ 의 예측치와 실제 $y_t(\tau)$ 값 사이의 오차를 최소화하는 방법으로 진행된다. 따라서 일괄적으로 추정 오차를 비교하는 것은 적절하지 않을 수 있다. 다만 다른 두 모형과 달리 추정 단계가 l_t, s_t, c_t 시계열 추정 단계와 l_t, s_t, c_t 모형의 모수 추정 단계를 분리하지 않고 한 번에 이루어지기 때문에 추정치의 정확도가 떨어질 가능성이 있다.

〈Appendix table 1〉
Parameters of Benchmark
Model

Parameters	Value
λ	0.0609
κ_{11}^P	0.201387
κ_{22}^P	1.002074
κ_{33}^P	2.467686
θ_1^P	0.029804
θ_2^P	-0.01271
θ_3^P	-0.01316
σ_{11}	0.009141
σ_{21}	-0.00983
σ_{22}	0.012831
σ_{31}	0.009444
σ_{32}	-0.00576
σ_{33}	0.015776

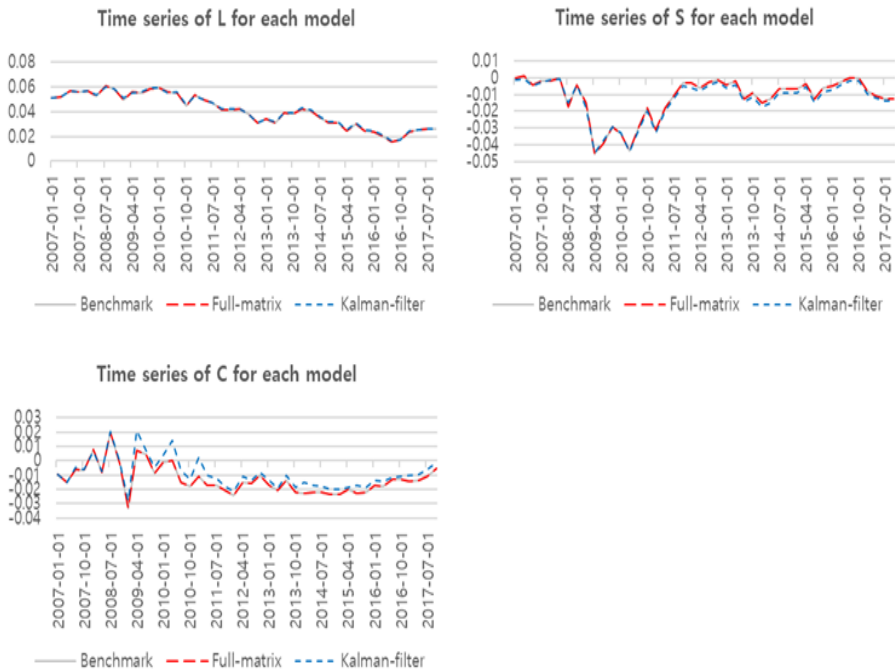
〈Appendix table 2〉
Parameters of Full
Matrix Model

Parameters	Value
λ	0.0609
κ_{11}^P	0.510528
κ_{12}^P	-0.79353
κ_{13}^P	-0.51868
κ_{21}^P	0.385115
κ_{22}^P	0.378537
κ_{23}^P	-1.47221
κ_{31}^P	-0.04423
κ_{32}^P	-0.13513
κ_{33}^P	1.758552
θ_1^P	0.038394
θ_2^P	-0.01069
θ_3^P	-0.01305
σ_{11}	0.01034
σ_{21}	-0.00769
σ_{22}	0.013704
σ_{31}	0.009552
σ_{32}	-0.00547
σ_{33}	0.016183

〈Appendix table 3〉
Parameters of
Kalman-filter Model

Parameters	Value
λ	0.049543
κ_{11}^P	0.428877
κ_{22}^P	0.071664
κ_{33}^P	0.64679
θ_1^P	0.04462
θ_2^P	-0.03482
θ_3^P	-0.01951
σ_{11}	0.040739
σ_{21}	0.028506
σ_{22}	0.042725
σ_{31}	-0.04869
σ_{32}	-0.03637
σ_{33}	-0.0481

〈Appendix figure 1〉 Comparison of L, S, C Time Series for Each Model



Abstract

We use the Dynamic Nelson-Siegel model (DNS) to simulate interest rate shocks and analyze how they affect the term structure of interest rates. We generate scenarios of the interest rate shocks following the suggestion of ICS: mean-reversion, level-up and down, twist-up and down shocks. Sensitivity analysis is also conducted on various parameter assumptions. We find that each scenario gives a various impact on the term structure. Therefore, it is necessary to cope with risk factors of interest rate shocks. Moreover, we analyze the difference in the interest rate shock scenarios between PCA and DNS. It will be necessary to select a model suitable for the domestic environment through various analyses and comparisons of interest rate risk models.

※ Key words: DNS, Interest rate shock, PCA, K-ICS