연구조사자료 **2005-1**

금리 시나리오 생성모델 연구

2005. 3

김 석 영

보험개발원

보험연구소

머리말

국내 금융시장은 IMF 외환위기를 통하여 이자율의 급속한 변동을 목격하였고, 3%대의 저금리 상황이 이어지고 있다. 이 과정에서 금리 역마진으로 인한 보험회사들의 이차손이 중요한 문제로서 제기되고 있으며, 이차손부담은 앞으로도 계속적으로 이어질 것으로 예상되어진다. 이는 상품개발시 금리의 향후 예측을 다양하게 점검하지 못한 것에 기인한다고 생각할 수 있다.

그래서 최근 많은 보험회사들이 이차역마진의 문제점과 현재의 저금리상황에 효과적으로 대처하기 위해서 많은 노력을 기울여 왔으며, 그 중 하나로서 ALM 시스템 및 계리소프트웨어를 도입하여 활용하고 있다. 이러한 노력을 통하여 향후 발생할 수 있는 금리리스크를 비롯한 다른 리스크에도 효과적으로 대응할 수 있게 되었다. 이러한 노력의 가운데에는 금리시나리오의 사용이 있는데, 현재 많은 보험회사들이 Ho-Lee, Hull-White, CIR 모델 등을 사용하고 있다. 금리시나리오를 보다 효과적으로 생성, 사용하기 위해서는 ALM이나 계리소프트웨어에서 사용되는 금리시나리오 생성 모델 및 여러 가지 제반사항에 대한 정확한 이해와 사용이 필수적이라고 할 수 있다. 관련업무 담당자들이 결정론적 시나리오와 확률론적 시나리오의 비교에서부터 시장균형모델, 무차익모델의 비교에 이르기까지 폭 넓은 이해를 바탕으로 금리시나리오를 사용하였을 때 가장 효과적으로 리스크에 대처할 수 있기 때문이다.

이에 본 보고서는 금리시나리오 생성 모델의 사용에 필요한 수익률곡선의 추정방법, 금리시나리오 및 모델의 종류, 금리시나리오 생성모델의 종류, 가치평가까지의 기초적 지식을 체계화하였다. 본 보고서가 국내 보험산업에 적합한 금리시나리오를 생성하여 활용하는데 기초자료로서 역할을 할 것으로 생각한다.

마지막으로 본 보고서의 내용은 연구담당자 개인의 의견이며, 우리원의 공식적인 견해가 아님을 밝혀둔다.

2005년 3월

보 험 개 발 원

원 장 김 창 수

<요 약>

Ⅰ. 서론

— 금리 시나리오 모델에 대한 정확한 이론적 이해의 부족으로 실제 업무에서 사용하는데 있어 한계가 있음.

— 이 보고서는 금리 시나리오 생성 모델의 정확한 이해와 사용을 위하여 전반적인기초 및 전문지식을 조사하는 것에 목적을 두고 있음

Ⅱ. 금리 시나리오 모델의 필요성

— 생명보험의 예정이율은 생명보험계약의 특성인 장기성으로 인해서 여러 가지 요소를 감안하여 설정되지만 향후 전개되어지는 금리의 변동에 대해서 항상 안정적 인 것은 아님. 따라서 금리의 변동에 대한 시나리오를 만들어서 다양한 분석이 필요 함.

— 금리 시나리오 모델을 활용하기 위해서는 수익률곡선추정, 금리시나리오 생성모델의 선택 그리고 Calibration 작업으로 이어지는 일련과정이 필요함.

Ⅲ. 수익률곡선의 개념 및 추정방법

□ 정부가 발행한 무이표채들의 만기와 만기수익률의 관계를 나타내는 곡선을 만기 수익률곡선(Yield Curve) 혹은 수익률 곡선이라고 함.

— 수익률곡선은 다양한 형태를 나타내며 대표적인 형태는 상향 수익률곡선, 하향수익률곡선, 수평수익률곡선, 그리고 언덕형 수익률곡선이며 상향 수익률곡선이 가장 보편적으로 나타남.

— 실제 시장에서는 모든 만기의 채권들이 거래되지 않기 때문에

Bootstrap 방법을 사용해서 존재하지 않는 만기의 만기수익률을 계산함.

□ 수익률곡선은 다양한 형태를 가지고 있으며, 그 형태를 결정짓는 요인에 대한 여러 가지 이론이 있음.

— 순수기대 가설 : 수익률곡선의 형태는 투자자들이 미래에 예상하는 단기금리의 기대값에 의해 결정된다는 가설임.

— 유동성선호 가설 : 투자자들이 만기가 긴 채권일수록 장기간 투자하는 대가로서 미래 기대금리 이외에 프리미엄을 더 요구한다는 가설임.

— 단기기대 가설 : 순수기대 가설의 특별한 경우로 상이한 만기를 가지는 모든 채권에 대한 단기간의 기대 투자수익률이 모두 같아지도록 현물금리가 결정된다는 가설임.

— 시장분할 가설 : 장기금리는 장기 채권에 대한 수요와 공급에 의하여 결정되며, 단기 금리는 단기 채권의 수요와 공급에 의해서 따로 결정되기 때문에 장기금리와 단기금리 사이에 특별한 관계가 존재하지 않는다는 가설임.

— 선호시장 가설 : 투자자들은 선호하지 않는 만기 채권에 투자하지 않지만 적절한 프리미엄이 제시되는 경우에는 투자할 수 있다는 가설임.

□ 실제 시장에서는 동일한 잔존만기를 가지는 여러 종류의 채권이 다양한 이표를 가지고 유통되고 있음. 이러한 복잡한 데이터로부터 현물금리곡선을 모델화하는 방법에는 통계적 방법과 이론적 방법이 있음.

— 통계적 방법 : 한 시점 t에서의 할인함수 $d(t,\tau)$ 혹은 현물금리 함수 $i(t,\tau)$가 만기 (τ) 의 함수임을 이용하여 만기에 대한 일반화된 함수를 이용하여 근사치를 구하는 방법. 대표적인 예로는 Nelson & Siegel 방법, 3차 스플라인(cubic spline), 지수 스플라인(exponential spline), B-스플라인(B-spline) 방법 등이 있음.

— 이론적 방법 : 수익률 곡선에 영향을 미치는 요인의 동적모델을 바탕으

로 시장에서 무차익거래이익이 발생하지 않도록 하는 채권가격의 모델을 찾는 방법임.

Ⅳ. 금리 시나리오 및 생성모델의 종류

□ 금리는 시간이 지남에 따라 여러 가지 형태로 계속적으로 변해 가기 때문에 금리관련 금융 상품의 가치평가를 위해서는 적절한 금리 시나리오가 필요하며 결정론적 시나리오와 확률론적 시나리오로 분류됨.

— 결정론적 시나리오 : 시간에 따른 금리의 변화를 과거의 경험에 기초하여 미리 정해 놓는 것으로서 금리 변화에 따른 민감도 분석(Sensitivity Analysis), 극단상황분석(Stress Test) 등에 효과적으로 사용될 수 있음. New York 7 시나리오가 대표적임.

— 확률론적 시나리오 : 금리는 위너과정(Wiener Process)을 한다는 가정하에서 과거 경험데이터로 부터 모수를 정하여 시나리오를 생성하는 것으로 Ho-Lee, Vasicek, CIR 모델이 널리 사용되고 있음.

□ 금리모델은 금리의 미래 변화를 예측하는 것으로서 두 가지 측면 즉 무차익 거래와 실제값과의 일치를 요구함. 그러나 두 가지 조건을 동시에 만족시키는 것은 한계가 있기 때문에 일반적으로 금리 모델은 크게 무차익모델과 시장균형 모델로 구분되어 짐.

— 시장균형모델 : 시장의 경제적 변수에 대한 가정을 바탕으로 한 모델로서 시장의 기초적인 움직임을 묘사함. 따라서 실제 시장데이터와는 다른 수익률 곡선을 만들 수 있음. 이 모델의 대표적인 것으로 CIR 모델, Vasicek 모델 등이 있음.

— 무차익모델 : 시장의 실제 수익률 곡선과 일치하도록 시나리오를 만드는 모델로 시장균형모델과는 달리 순간금리의 편미분방정식에서 추세부분이 항상 시간에 관한 함수로 표현됨. 이 모델의 대표적인 것으로 Ho-Lee 모델, Hull-White 모델 등이 있음.

□ 모든 투자에는 시간에 따른 시장리스크(market risk)가 존재하고 있기 때문에 투자자들은 무위험 이자와 함께 시장리스크(market risk)에 대한 기간프리미엄(term premium)을 요구하나 위험중립가정(risk neutral)가정에서는 기간프리미엄(term premium)이 사라지기 때문에 채권이나 기타금융상품을 평가할 때에는 단지 무위험이자만이 고려됨.

― 위험중립 및 무차익 모델 : 시장 정보가 충분 또는 신뢰할 수 있는 경우에 사용.
― 위험중립 및 시장균형 모델 : 시장정보가 불충분하거나 신뢰할 수 없는 경우에 사용.
― 비위험중립 및 무차익 모델 : 기간프리미엄(term premium)의 정확한 산출이 불가능하므로 비현실적임.
― 비위험중립 및 시장균형 모델 : stress test 또는 VaR 산출용으로 적합함.

Ⅴ. 금리 시나리오 모델

□ 금리의 수익률 곡선은 랜덤하게 움직이지만 주성분분석(Pricipal Component Analysis)를 하여 보면 대체적으로 3개월, 6개월, 1년 만기 수익률에 의해서 전체 수익률곡선의 움직임이 대체적으로 설명이 됨. 따라서 수익률 곡선의 설명 요소로서 1 - 2 개의 요소를 택한 금리 시나리오 모델이 널리 사용되어지고 있음.

― Affine 모델 : 다루기가 쉽기 때문에 가장 널리 사용되어지는 모델로서 채권가격이 순간금리(short rate)에 대해서 선형으로 표현되는 모델로서 Ho-Lee 모델, Vasicek 모델 등이 있음.
― HJM 모델 : 순간금리(short rate)를 설명변수로 갖는 대신 모든 만기의 선도금리(forward rate)가 설명변수가 되는 모델임. 이 모델에서는 선도금리(forward rate)의 확률미분방정식 추세 부분이 변동성에 의해서 완전히 결정되며 Ho-Lee 모델, Vasicek 모델 등이 이에 해당됨.

— Consol 모델 : 장기금리의 예측에 사용되어진 모델로 Brennan - Schwartz 모델이 있음.

— Positive Interest rate 모델 : 시장에서 관찰되는 금리는 거의 항상 양수이기 때문에 양수의 금리를 생성하는 모델의 필요성에 의해서 만들어진 모델로 대표적인 모델로서는 Black-Derman-Toy 모델, Black-Karasinski 모델이 있음.

□ 금리 시나리오 모델은 어느 모델이 더 우수하고 더 정확하다고 할 수 없기 때문에 모델 선택 시 시나리오 사용 목적에 가장 적합한 모델을 선택하여야 함. 그러나 일반적으로 금리 시나리오 모델에서 요구되어지는 것은 시장 정보에 얼마나 잘 맞는지에 대한 적합성, 다양한 시나리오를 생성할 수 있는지에 대한 다양성, 그리고 다루기가 얼마나 편리한가에 대한 편리성임. 그러므로 이 세 가지 기준에 따른 비교와 사용목적에 맞추어서 모델을 선택하여야 할 것임.

□ Ho-Lee, Vasicek 그리고 CIR 등 금리 시나리오 모델에 있는 모수들을 시장의 정보를 이용해서 결정하는 것을 Calibration이라고 하는데 이때 다음과 같은 사항이 고려되어짐

— 채권의 이론가격과 실제 시장가격이 맞추어지도록 모수를 결정.

— 모델의 모수의 개수보다 시장에서 유통되어지는 만기의 개수가 더 많기 때문에 실제적으로 값을 일치시킬 수 없음. 그러나 이런 문제점을 해결하기 위해서 모수를 시간의 함수로 표현함으로서 모수의 개수가 무한히 많아져서 문제를 해결할 수 있음.

Ⅵ. 가치평가

□ 금리 시나리오 모델의 사용 목적 중의 하나는 파생상품의 가치평가를 위한 것임. 파생상품의 가치를 평가하는 방법으로 finite difference 방

법, Monte Carlo 방법 그리고 Lattice 방법이 널리 사용되어 지고 있음.

— Finite Difference 방법 : 수치해석학적인 접근을 통해서 미분에 대한 근사값을 구해서 문제를 해결하는 방법임.
— Monte Carlo 방법 : 현재 널리 사용되어 지고 있는 방법으로 random number를 이용한 시뮬레이션(simulation)을 통해서 가치를 산출하는 방법임.
— Lattice 방법 : 이자율 트리에 확률을 주어서 이를 바탕으로 가치를 산출하는 방법.

Ⅶ. 향후 과제 및 시사점

□ 금리시나리오 생성 모델에 대한 수학적 통계학적 연구가 보다 심층적으로 수행되어야 함.
□ 금리시나리오 생성모델의 변수 선정을 위해서 한국 금융시장에서 금리의 변동요인에 대한 분석 및 연구가 이루어져야 할 것임.
□ 시장상황에 따른 적절한 모델의 사용을 위해서 실제 자료들을 바탕으로 모델별 비교 분석이 필요하다.

<목　　차>

표 목차

그림 목차

Ⅰ. 서론

1. 연구배경

국내 금융시장은 1997년 사상 초유의 외환위기를 지나면서 시장금리의 급속한 변동을 목격하였다. 연 20%이상의 초 고금리에서 빠른 속도로 하락하기 시작하여 이제는 사상 초유의 3%대의 저금리시대가 이어지고 있으며, 물가상승률을 감안할 경우 마이너스 금리시대이다. 그리고 이 상태가 어느 정도 계속될 것으로 전망되고 있다. 한편으로 생명보험사의 예정이율은 완전자유화되어서 보험사는 자사 경쟁력 및 시장상황을 고려해서 자율적으로 설정할 수 있게 되었다.[1] 따라서 현재의 금리하락에 맞추어 효율적으로 대처할 수 있는 환경이 조성되었다.

그러나 과거에 판매된 상품의 경우 현재와 같은 금리하락을 예상하지 못한 상태에서 고금리보장하에 판매되어 현재 이차역마진으로 보험사에 큰 부담으로 존재하게 되었다. 자유화된 이후에 판매된 상품들도 최근 수준의 금리하락을 예상하지는 못하여서 그에 따른 대비책이 충분치 못한 상황이다.

따라서 최근 들어 각 보험사들은 이차역마진의 문제점과 현재의 저금리에 효과적으로 대처하고 보험 상품의 정확한 가치평가를 위해서 ALM 시스템, ALFA, MOSES 등과 같은 계리소프트웨어 등을 도입, 운영하기 시작하였다. 그리고 ALM 시스템과 계리소프트웨어 등에서 미래 가치의 현가계산을 위해서 금리 시나리오의 생성 및 사용이 필요하게 되었다. 따라서 기존의 획일적인 금리 시나리오 가정에서 벗어나 다양한 금리 시나리오를 가정함으로서 향후에 일어날 상황을 예측하고 그에 따른 손익을 전망할 수 있게 되었다.

그러나 실질적으로 금리 시나리오를 생성 및 사용에 있어서 여러 가지 어려움이 존재해서 대부분의 보험회사들은 시스템에 내장된 함수들로서 금리 시나리오를 생성해서 사용하던가 아니면 ‘New York 7’ 같은 결정론적 시나

1) 예정이율의 공시체계는 2001년 5월부터 자율공시체계로 전환되어 생명보험회사는 기준금리를 각 생명보험회사의 재무상태 및 경영전략에 맞추어 설정할 수 있음.

리오를 사용하고 있는 형편이다. 현재 여러 가지 금리 시나리오 생성 모델들이 알려져 있고 그 중 어떤 모델들이 시스템에 내장되어 있지만 그 모델들에 대한 충분한 이론적 배경과 활용방안에 관한 이해가 없다면 사용상에 있어서 한계가 있을 수밖에 없다. 금리 시나리오의 사용목적에 맞게 시장균형 모델을 사용할 것인지 무차익거래 모델을 사용할 것인지 등 모델의 특성을 파악해서 선택하여야 한다. 그리고 더 나아가서 현재 시장상황을 정확히 시나리오 생성에 반영하지 못한다면 여기서 생성되는 시나리오를 바탕으로 미래의 여러 가지 상황을 예측한 결과는 사용상에 한계가 있다.

더 나아가 2004년 6월 합의된 BASEL Ⅱ 협약에 의해서 금융회사들은 자신들의 기준에 따른 시나리오 분석에 의한 리스크 관리를 해야 한다. 특정한 시나리오 생성모델에 관한 기준은 따로 없지만 금융회사들은 자신들의 상황에 가장 적합한 선택하여 금리 시나리오를 생성해서 리스크 관리를 하여야 하기 때문에 금리 생성모델은 합리적인 미래 예측뿐만 아니라 여러 가지 위기상황에 따른 분석도 가능하게 하도록 선택되어야 한다.

그러므로 금리 시나리오 생성 모델에 관한 이론적 바탕과 활용방안에 관한 연구가 필요하다. 본 보고서 현재 알려진 금리 생성모델에 대한 이해를 돕고 나아가 효율적이고 과학적인 활용을 위해서 금리 생성모델의 기초가 되는 채권에서 부터 금리 모델에 이르기까지 금리 시나리오 생성모델에 관련된 전체적인 자료를 조사, 분석하였다.

2. 선행 연구

금리 시나리오 모델에 관한 연구는 80년대에 들어서면서부터 국외에서 본격적으로 연구되기 시작하여 90년대에 들어서 다양한 연구결과들이 나오고 있다. Vasicek (77년), Ho 와 Lee(1986), Hull 과 White(1990) 등에 의해서 초창기 모델들이 소개된 이후 오늘날 다양한 모델들이 계속 연구되어 지고 있다.

국내에서는 IMF 금융위기를 겪으면서부터 금리 시나리오에 대한 인식의 변화가 이루어져 관련연구가 진행되고 있다. 류건식, 김은주(1998)은 생명보험

회사의 예정이율리스크를 최소화하기 위해 금리예측의 필요성을 언급하였다. 그리고 김광빈(1998)은 적정 예정이율 설정과 손익관리를 위한 시나리오 기법을 소개하였다. 특히 자산과 부채의 현금흐름분석을 위해 미국 뉴욕주법 제126조의 결정론적 시나리오와 변형된 로그정규모델(Jetton 모델)에 의한 확률론적 시나리오로 금리생성을 시도하였다. 류건식(2001)은 예정이율리스크의 측정을 위한 다양한 금리 시나리오 생성을 위해 대수정규모델, Jetton 모델, CIR 모델 등을 활용하였다. 박준용 · 오규택 · 이창용(2001)은 국내 단기금리(콜금리, CD 금리, 회사채 수익률 등)를 중심으로 모수적 · 비모수적 확산모형에 의해 모형화한 후 단기간의 금리예측을 시도함으로써 확산모형으로서 CIR 모형을 제안하였다.

그동안의 많은 연구자들의 연구 성과의 축적으로 인해서 국외에서는 금리모델에 대한 책들이 출간되고 있다. J. Hull(1999)의 “Options, Futures, & Derivatives” 와 같은 책에서 일부 언급되었지만 금리 자체만을 다룬 책은 아니었다. 그러나 J. James 와 N. Webber(2000) 의 “Interest rate modelling”, A. Cairns(2004)의 “Interest rate models” 등과 같은 금리 모델만을 전문적으로 다룬 책들이 출간되면서 모델을 다루고 이용하는 실무자들에게 많은 도움을 주고 있다. 그러나 국내에서는 한국산업은행(2000)의 “한국의 채권시장과 수익률 곡선” 등과 같은 책에서 통계적 수익률 곡선추정방법에 관해서 자세한 설명을 하고 있지만 금리 모델에 있어서는 Visicek, CIR 모델 등에 관해서만 설명하고 있다.

3. 연구 범위

현재 업계에서는 기존에 알려진 모델들 Ho-Lee, Hull-White, CIR, 그리고 Black-Karasinski 모델 등을 사용하고 있다. 그러나 이에 대한 충분한 이론적 검토와 비교없이 사용되어지고 있는 형편이다. 따라서 이번 조사보고서에서는 향후에는 우리의 금융실정에 맞는 금리 시나리오 모델의 개발과 활용을 위해서 우선적으로 기존 금리 모델의 이해와 활용을 도울 수 있도록 구성되었다.

본 보고서는 금리 시나리오 생성모델을 이해하고 응용하기 위해서 필요한 기초적인 지식들을 조사 및 비교 분석을 하였다. 금리 시나리오를 이해하기 위해서 먼저 금리에 관한 이해가 필요할 것이고 더 나아가서 금리에 관한 이해를 위해서 채권에 관한 이해가 선행되어야 할 것이다. 따라서 본 보고서에서는 채권에 관한 기초상식에서부터 금리 모델의 calibration까지 순차적으로 다음과 같이 고찰하였다.

제 Ⅱ장에서는 보험회사의 금리 시나리오 모델필요성에 관해서 살펴보았다. 그리고 금리 시나리오 모델의 활용을 위해서 필요한 전반적인 작업과 모델의 일반적인 개요를 살펴보았다.

제 Ⅲ장에서는 수익률 곡선의 개념 및 곡선의 산출 방법에 관해서 살펴보았다. 그리고 수익률 곡선의 다양한 형태를 설명하는 이론적 가설들을 살펴보았다. 그리고 실제 현장에서 사용되어지는 수익률곡선 추정방법에 관해서 살펴보았다. 금리 시나리오 모델에 현재 시장의 만기별 수익률을 입력 자료로서 사용해야 할 경우 시장의 데이터로부터 수익률 곡선을 어떻게 추정하는지 5가지 수치해석학적인 방법론을 살펴보았다.

제 Ⅳ장에서는 금리 시나리오의 종류 및 선택방법에 관해서 살펴보았다. 확률론적 시나리오와 더불어 여전히 많이 사용되어지고 있는 결정론적 시나리오에 관해서 살펴보았다.

제 Ⅴ장에서는 제 Ⅳ장에서 언급된 확률론적 시나리오를 생성하는 금리 모델들에 대한 기본 개념 관해서 살펴보았다. 시장균형모델과 무차익거래 모델에 대한 설명과 비교를 통하여 모델 선택 시 주의해야 할 점을 살펴보았다. 그리고 금리 시나리오 모델에 대한 개념과 각각의 모델에 관해서 살펴보았다. 금리 시나리오 모델의 기본이 되는 확률미분방정식, 위험가격(market price of risk)등을 먼저 살펴보았다. 그리고 현재 널리 사용되어지고 있는 금리 시나리오 모델을 크게 4가지 분류로 나누어서 살펴보았다. 그리고 금리 시나리오 모델의 선택기준을 통해서 비교 분석해보았다. 또한 마지막으로 실제 데이터를 사용해서 모수를 결정하는 방법에 관해서 살펴보았다. 금리 시나리오 모델이 보다 실제값과 가깝게 시나리오를 산출하게 하기 위한 작업과 문제점을 살펴보았다.

제 Ⅵ장에서는 파생상품의 가치를 평가하는 방법을 살펴보았다. 금리 시나

리오 모델의 목적중 하나는 금융상품의 가치를 평가하는 것인데 이를 finite difference 방법, monte carlo simulation 방법, 그리고 lattice 방법을 통해서 살펴보았다.

마지막으로 금리모형에 대한 기초지식, 중요한 수학적 정리 및 공식들은 증명과 함께 부록에 첨부하였다.

Ⅱ. 금리 시나리오 모델의 필요성

1. 보험회사의 필요성 및 현황

보험 상품을 설계할 때 기본적으로 들어가는 가정에는 예정위험률과 함께 예정이율이 있다. 보험에서 예정이율이라 함은 보험의 가격을 산정하는데 사용되는 할인율의 하나이다. 생명보험계약은 기본적으로 수지상등의 원칙을 근거로 하고 있다. 보험계약이후 유입될 수입보험료의 현재가치와 지급될 보험금의 현재가치가 동일하여야 한다는 것이다. 이 때 보험료와 보험금을 현재가치화하기 위하여 적용하는 할인금리가 바로 보험의 예정이율이다.

보험계약에서 특히 생명보험계약에서 예정이율의 중요성이 강조되는 이유 중의 하나는 생명보험계약이 장기계약이고, 영업보험료에 저축보험료가 포함되어 있기 때문이다. 즉 영업보험료중의 위험보험료 및 사업비를 제거한 나머지 부분은 예정이율로 보험기간 동안에 준비금 형식으로 부리해야 하기 때문이다. 이처럼 예정이율은 보험료산출의 기초가 되는 예정기초율 중의 하나로서, 보험회사는 예정이율 수준이상의 자산운용 수익율을 올려야만 계약자에게 급부를 지급할 수 있는 최소한의 필요자금을 마련할 수 있다.

우리나라 생명보험산업에서는 보험판매에 따른 준비금적립에 대한 평가방식이 발생연도방식이기 때문에, 생명보험의 예정이율은 회사가 보증하는 이율이며, 향후 금리가 변동되더라도 계약 종류시까지는 변동되지 않는다. 따라서 금리변동, 주가 하락, 부동산 변동 등에 의한 자산운용수익률의 감소로 역마진이 발생할 경우에도 보험회사가 이를 전부 부담하게 된다.

이와 같은 특성으로 인해 생명보험의 예정이율은 생명보험계약의 특성인 장기성을 고려하여 장기적인 경제여건, 금리변동 추이, 배당률과 타 금융상품과의 가격경쟁력 등을 종합적으로 감안하여 안정적이고 또한 보수적인 이율로 정하는 것이 일반적이다.

이렇게 결정된 예정이율이지만 실제적으로 향후 전개되어지는 금리의 변동에 대해서 항상 안정적인 것은 아니다. 과거의 금리변동 추이가 미래의 금리

변동을 완전히 설명하는 것은 아니기 때문이다. 따라서 보험회사는 여러 가지 미래 금리 변동에 대한 시나리오를 필요로 하게 된다. 여러 시나리오를 통해서 보험 상품이 안정적으로 운영될 수 있는지를 점검할 수 있고 나아가서 예정이율의 적정성을 재점검을 할 수 있다.

따라서 보험회사는 금리 시나리오 및 시나리오 생성모델을 필요로 하게 된다. 현재 시장에서 향후에 발생할 수 있는 금리의 변동을 생성하는 합리적인 모델 없이는 합리적인 예정이율 설정 및 손익전망을 할 수가 없게 된다. 수백 수천가지의 시나리오 분석을 통해서 보험회사는 보험 상품의 손익분포를 파악할 수 있고 그에 따른 리스크관리를 할 수 있다. 신계약 출시 상품의 손익 전망과 더불어 현재 보유계약의 미래가치를 평가하는데 있어서도 필수적이다. 고정된 금리에 의해서 만들어지는 보유계약의 가치의 정합성은 수백 수천가지 시나리오에 의해서 만들어지는 보유계약의 가치에 비해서 떨어지는 것은 당연하다.

현재 많은 보험회사들은 IMF 금융위기 이후 ALM 시스템을 구축 및 활용하고 있으며 ALFA, MOSES 그리고 Prophet 등과 같은 계리소프트웨어를 사용하고 있다. ALM 시스템 및 계리소프트웨어를 활용하여 직접 또는 간접적으로 시나리오를 생성 운영함으로서 상품의 손익분포 및 보유계약의 가치분포를 파악하고 있다. 널리 사용되어지고 있는 금리 시나리오 및 금리 시나리오 생성모델로서는 ‘New York 7’ 시나리오와 함께 많은 회사들이 CIR 모델, Hull-White 모델, Ho-Lee 모델, 그리고 Vasicek 모델 등을 기본적으로 사용하고 있으며 일부 회사에서는 Black-Karasinski 모델을 사용하고 있다.

그러나 보험회사에서 모델들을 실제 사용하는데 있어서 많은 어려움이 있다. 모델들의 정확한 특성의 파악 없이 사용함으로서 목적과 부합되지 않는 시나리오를 생성·사용할 수 있다. 더 나아가서 환율, 미국 국채금리 등 시장의 금리 변동요인에 의해서 금리의 변동이 심한 우리나라 시장상황에서 시장의 과거 경험에 근거한 모수결정으로 장래의 금리를 예측함으로서 현실과 부합되지 못하는 면이 많이 있다. 따라서 실제 사용에 있어서는 사용자의 주관적 의사결정에 의해서 모델의 모수들이 결정되기도 한다. 금리 시나리오의 일반적 사용 목적이 미래 현금흐름의 적정성과 수익성을 여러 가지 시나리오 측면에서 보고자하는 것이 목적이기 때문에 실제 금리의 현상과 부합되는 것

이 중요하기보다는 다양한 금리 시나리오의 생성에 더 의미를 부여할 수도 있을 것이다. 그래서 현업에서는 발생 가능한 다양한 금리 시나리오의 생성에 더 의미를 두고 있는 형편이다.

2. 금리 시나리오 생성모델의 개요

금리 시나리오는 결정론적인 방법과 확률론적인 방법으로 만들 수 있다. 그러나 일반적으로 금리 시나리오 생성모델에 관해서 언급할 때는 확률론적 모델을 말한다. 확률론적 시나리오 생성모델을 사용해서 시나리오를 생성하는 것은 단순히 모델만을 사용해서 시나리오를 생성하는 것이 아니다. 시나리오를 생성하기 위해서 그전에 여러 가지 작업들이 선행되어야 한다.

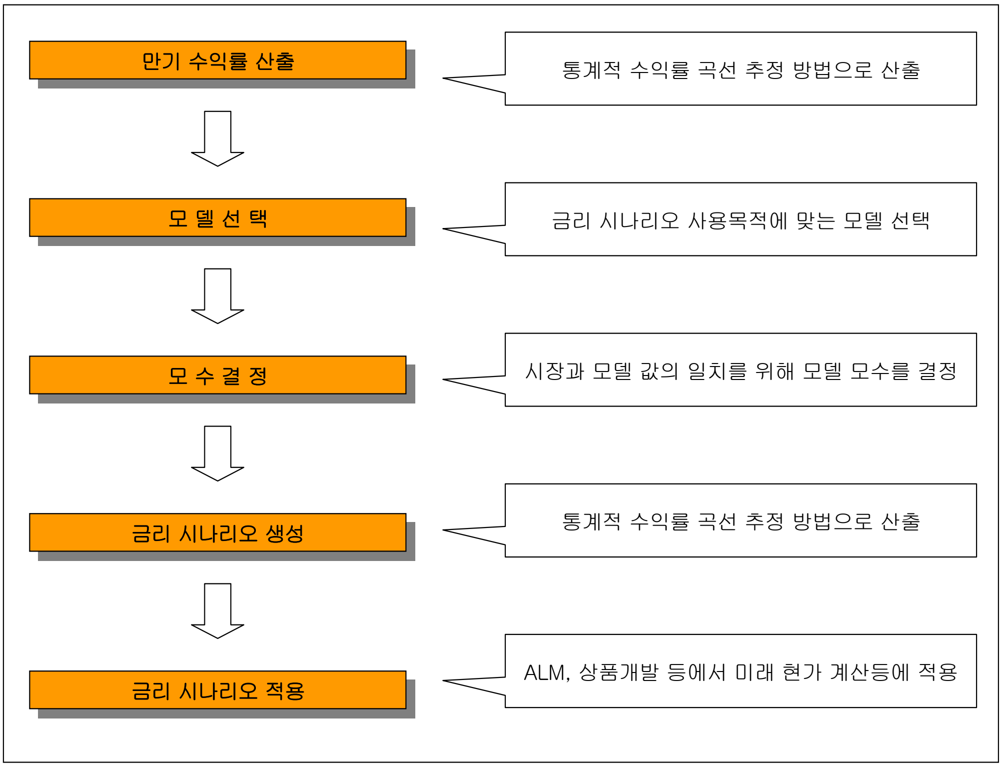
첫째, 시장의 값을 반영하기 위해서 시장의 데이터를 이용해서 만기별 수익률을 구하여야 한다. 그러나 실제 시장에서는 같은 잔존만기를 가지는 여러 종류의 채권이 다양한 이표를 가지고 유통되고 있고 그리고 모든 만기에 대해서 채권이 유통되고 있지는 않다. 따라서 주어진 자료를 바탕으로 수치해석학적인 방법(Numerical Analysis Method)으로 근사함수를 구하여 산출한다. 이에 대해서는 제 3장에서 자세히 언급하였다.

둘째, 금리 시나리오의 사용목적에 맞는 모델을 선택하여야 한다. 모델은 크게 시장균형모델과 무차익모델 두 종류로 구분되어진다. 시장의 경제적 변수에 대한 기초적인 가정을 바탕으로 금리의 기초적인 움직임을 시나리오로 만들 것인가 아니면 현재의 실제 수익률곡선과 일치하는 시나리오를 만들 것인가에 따라서 모델을 선택하여야 한다. 각 모델에 의해서 생성되는 시나리오는 다른 특징을 가지게 된다. 이에 대해서는 제 4장 과 5장에서 자세히 언급하였다.

셋째, 모델을 통해서 생성되는 시나리오와 실제 시장의 데이터를 비교해서 모델에 입력되는 모수의 값을 결정하여야 한다. 이를 Calibration 이라고 부르는데 이 작업을 통해서 모델의 정확한 모수가 결정된다. 즉 모수를 조정하여서 시나리오와 실제데이터의 값이 일치하도록 하여서 최종적인 모수값을 결정하게 된다. 이에 대해서는 제8장에서 자세히 언급하였다.

한편으로는 금리와 금리 변동에 대한 이해가 필요하다. 현재 시장에서 유통되어지는 채권의 종류와 보험회사의 예정이율 및 자산운용수익률에 영향을 미치는 채권과 금리에 대한 이해가 선행되어야 할 것이다. 그에 대한 이해를 바탕으로 위에서 언급된 작업들이 순차적으로 실행되어야 보다 효율적으로 금리 시나리오 생성모델을 활용할 수 있을 것이다.

<그림 Ⅱ - 1> 금리시나리오 사용 흐름



금리 시나리오 생성모델은 one-factor 모델의 경우 기본적으로 추세와 변동성 두 부분으로 구별되어서 설명되어진다. 추세부분은 금리의 전반적인 추세를 의미하는 것으로 장기적으로 상승 혹은 하락을 결정짓는 부분이다. 모델에 따라서 평균회귀성질을 가지는 것도 있는데 이는 금리가 일반적인 추세를 벗어난 경우 평균적인 값으로 회귀하는 것이다. 변동성은 금리가 불규칙하게 변하는 것을 구현하기 위한 것이다. 즉 금리는 브라운운동을 하는 것으로 간

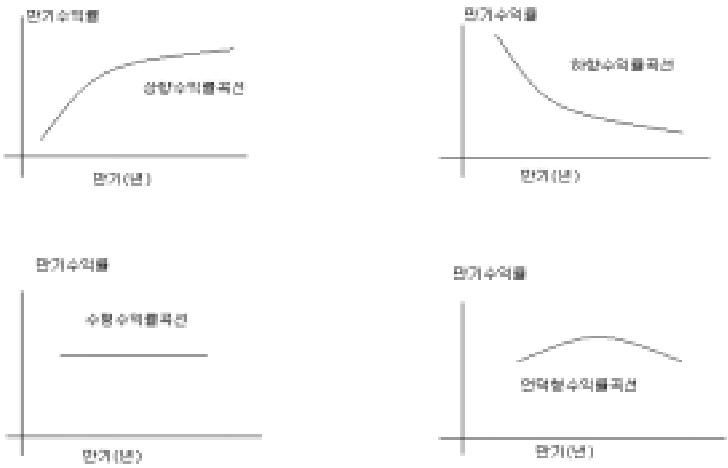
주되고 따라서 이를 랜덤변수(random variable)를 이용해서 표현한 부분이 변동성 부분이다. 그러므로 금리 시나리오 생성모델은 추세와 변동성 두 부분을 어떻게 정하느냐 의해서 구별되어진다. 이에 대해서는 제 5장에서 언급하였다.

Ⅲ. 수익률곡선의 개념 및 추정방법

1. 수익률곡선의 개념

정부가 발행한 무이표채들의 만기와 만기수익률의 관계를 나타내는 곡선을 만기수익률곡선(Yield Curve) 혹은 줄여서 수익률곡선이라고 한다. 즉 만기에 따른 현물금리들을 그래프로 보여준 것을 말한다. 이 곡선은 또한 기간(만기)에 따른 금리(수익률)값의 수준을 나타낸다는 의미에서 “금리 기간구조(the term structure of interest rates)"라고도 불린다.

<그림 Ⅲ - 1> 수익률 곡선 종류



금리는 당시의 실질금리, 예상인플레이션 뿐만이 아니라 만기의 차이나 지급불능 위험에 따른 프리미엄 등에 의해 결정된다. 따라서 만기와 함께 상승 또는 하락을 하기도 하기 때문에 여러 가지 다양한 형태를 나타낸다. 그러나 일반적으로 볼 때 가장 대표적으로 나타나는 형태는 상향 수익률곡선, 하향 수익률 곡선, 수평 수익률곡선 그리고 언덕형 수익률곡선 형태로 요약할 수 있다.

상향 수익률 곡선은 역사적으로 가장 보편적인 수익률 곡선의 형태이지만

시장의 상황에 따라 다른 3가지 형태로 변형되기도 한다. 1997년말 외환위기 발생초기에는 장기금리가 단기 금리보다 낮아져서 하향수익률 곡선 형태가 나타났었다.

2. 수익률 곡선 산출

수익률곡선은 현물금리들을 그래프로서 나타낸 것이지만 실제 시장에서 현물금리들이 다 주어지는 것이 아니다. 수익률 곡선을 구성하는 다양한 만기의 채권들이 시장에서 거래되고 있으면 현물금리들을 시장에서 바로 구할 수 있지만 실제 시장에서는 다양한 만기의 채권들이 거래되지 않고 있다. 따라서 시장에서 값을 구할 수 없을 경우 단기 상품의 현물금리(spot rate)과 이표채의 현재가를 이용하는 Bootstrap 방법을 사용한다.

Bootstrap 방법을 사용하여 수익률곡선(yield curve)을 구하는 방법을 알아보자. 시장에서 거래되는 만기 1, 2, 3, 4년의 액면가 채권의 액면금리가 다음 <표 Ⅲ-1>과 같이 주어지고 이자 지급은 연간 1회이고 모든 채권의 액면가는 100으로 가정한다.

<표 Ⅲ-1> 만기별 금리

만기(t)	액면금리
1	3.00 %
2	3.50 %
3	4.00 %
4	4.50 %

이때 동일한 만기의 현물금리들을 구하여 보자. 먼저 액면금리 3.0%의 만기 1년 액면가채권으로부터 1년 현물금리 $r(1)$을 구하여보자

$$100 = \frac{103}{1 + r(1)}$$

이 식으로부터 $r(1)$의 값 3.0%를 구할 수 있다. 다시 $r(2)$를 구하기 위해서 만기 2년 액면가 채권을 이용하여 보면 다음과 같은 (수식 1)를 구할 수 있다.

$$100 = \frac{3.5}{1 + r(1)} + \frac{103.5}{(1 + r(2))^2} \qquad \text{(수식 1)}$$

(수식 1)과 위에서 구한 $r(1)$값을 이용하면 $r(2)$= 3.51%가 산출된다. 다음 $r(3)$을 구하기 위해서 만기 3년의 액면가 채권을 이용하면 같은 방법으로 구할 수 있다.

3. 수익률 곡선 결정에 관한 이론

수익률 곡선의 형태는 다양하게 나타날 수 있는데, 이러한 형태를 결정짓는 요인에 관해서 설명하려는 다양한 노력들이 고전학파로부터 케인즈에 이르기까지 다양하게 제기 되어왔다. 여기서는 대표적인 네 가지의 가설들을 소개하기로 하겠다[2].

가. 순수기대 가설(Pure Expectations Hypothesis)

가장 널리 알려진 가설 중 하나인 이 가설에 따르면, 미래시점의 예상(현물)금리 값에 따라 현재의 장기 현물금리 값이 결정된다는 것이다. 수익률 곡선의 형태와 관련하여 이 가설이 뜻하는 바는, 수익률 곡선의 형태는 투자자들이 미래에 예상하는 단기 금리의 기대값에 의해 결정된다는 것이다. 예로서 장기 현물금리가 단기 현물금리보다 높다면 이는 미래 단기 금리들이 현재의 단기 금리 수준보다 상승한다고 투자자들이 예상하기 때문이라는 것이다. 반면 하향수익률곡선이 관찰되면, 이는 미래의 단기 금리들이 현 수준보다 하락할 것이라는 투자자들의 예상 혹은 기대가 반영되었기 때문이다. 결론적으로 이 가설이 주장하는 것은, 시장의 투자자들의 미래 금리 수준에 대한 예상이 반영되어 모든 장기 현물금리가 결정되며 또 이 예상만이 장기 현물금리를 결정하는 유일한 요인이라는 것이다.

이 가설의 내용을 수식으로 표현하면 다음과 같다

$$[1+r(n)]^n = [1+r(1)]\times[1+E[r(1,1)]]\times[1+E[r(1,2)]]\times\cdots\times[1+E[r(1,n-1)]]$$

$$= \prod_{t=0}^{n-1}[1+E[r(1,t)]]$$

2) 유 진, 『채권과 금리파생상품』, 서울 : 경문사, 2003, pp.75～124.

여기서,

$E[\bullet]$: 현재시점에서의 미래금리에 대한 기대값

$r(n)$: n 년 만기 현물금리

$r(1,n)$: n 년 후의 만기 1년 현물금리의 확률변수

순수기대 가설에 따르면 장기 현물금리는 전적으로 미래 단기 금리의 기대값에 의하여 결정되므로, 이 기대값에 따라 상향, 하향, 수평 및 언덕형 수익률 곡선이 모두 실현될 수 있다.

나. 유동성선호 가설(Liquidity Premium Hypothesis)

순수기대 가설은 이론적으로 명쾌한 가설이기는 하지만 시장의 투자자들이 위험을 회피하는 속성을 간과했다는 단점이 있다. 위험을 회피하는 투자자들은 자신의 투자기간보다 긴 장기 채권에 투자하기를 꺼리게 된다. 왜냐하면 투자기간 종료 시 자신에게 귀속될 미래가치가 불확실하기 때문이다. 예로서 목표투자기간이 1년인 투자자가 5년 만기 채권에 투자한다면, 1년 후 4년 만기 채권이 되는 이 채권의 미래 가격을 현재로서는 알 수 없으므로 투자자로서는 위험을 부담하게 된다. 즉 금리 위험을 부담하게 되는 것이다. 한편 이 투자자가 1년 만기 무이표채에 투자한다면 투자기간이 끝나는 시점인 1년 후 이 채권은 확정된 액면가를 지급하며 소멸되므로 투자자는 금리위험을 부담하지 않는다. 그러므로 투자기간이 단기인 투자자들이 장기 채권에 투자하기 위해서는, 자신들이 부담하는 위험에 대한 추가적인 보상, 즉 위험 프리미엄이 채권가격에 반영될 경우에 한해서만 투자를 실행하게 된다. 결과적으로 이 가설에 의하면 장기 채권에 대한 현물금리는 시장에서 예상하는 미래 단기 금리의 기대값에 일정한 위험 프리미엄이 가산된 값으로 결정된다. 따라서 유동성선호 가설은 투자자들이 만기가 더 긴 채권일수록 장기간 투자하는 대가로서 기대 미래금리 이외에 프리미엄을 더 요구한다는 이론이다. 이는 현실적으로 장기채권이 단기 채권에 비하여 투자원금 및 이자 지급에 대한 위험이 더 크고 미래금리의 변화에 따른 미래 채권가격의 불확실성이 커짐에 따라 이를 보상할 프리미엄이 요구된다는 것이다.

이 가설의 내용을 수식으로 표현하면 다음과 같다

$$[1+r(n)]^n = [1+r(1)] \times [1+E[r(1,1)]+\alpha(1)] \times [1+E[r(1,2)]+\alpha(2)]$$
$$\times \cdots \times [1+E[r(1,n-1)]+\alpha(n-1)]$$
$$= \prod_{t=0}^{n-1} [1+E[r(1,t)]+\alpha(t)]$$

여기서, $\alpha(m)$: 미래시점 $t=m$의 단기 금리에 대한 위험 프리미엄 > 0 이다.

이 가설에 따르면 선도금리 및 장기현물금리는 미래 단기 금리의 기대값과 위험프리미엄에 의하여 결정되므로, 이 기대값과 위험프리미엄의 크기에 따라 상향, 하향, 수평, 및 언덕형 수익률 곡선이 모두 실현될 수 있다.

다. 단기기대 가설(Local Expectations Hypothesis)

이 가설은 순수기대 가설의 특별한 경우로 상이한 만기를 가지는 모든 채권에 대한 단기간의 기대 투자수익률이 모두 같아지도록 현물금리가 결정된다는 것이다. 예로서 단기간을 1년으로 정의하면 만기 5년의 무이표채를 매입하여 1년 동안 보유할 때의 기대 수익률이 1년 만기 무이표채를 매입하여 1년 동안 보유할 때의 수익률과 같아지도록 현물금리의 값들이 결정된다는 것이다. 이 가설이 이론적으로 중요하게 취급되는 이유는, 채권 투자의 차익거래를 허용하지 않는 유일한 가설이라는 점이다. 즉 다른 가설들은 이론적으로 입증하기 어려운, 금리 기간구조에 대한 주관적인 견해에 불과하지만, 이 가설만은 “무차익원칙(no arbitrage principle)"이라는 이론으로 입증되는 가설이라는 것이다.

라. 시장분할 가설(Segmented Markets Hypothesis)

이 가설은 장기금리는 장기 채권에 대한 수요와 공급에 의하여 또 단기 금리는 단기 채권의 수요와 공급에 의해서 결정되기 때문에 장기 금리와 단기 금리 사이에 특별한 관계가 존재하지 않는다는 가설이다. 그 이유는 채권시장의 각 투자자마다 자신이 선호하는 만기의 채권에만 주로 투자하기 때문이

다. 예로서 은행이 채권에 투자할 경우에는 투자자금의 원천인 예금의 만기를 감안하여 매입채권을 결정하여야 한다. 투자신탁 회사의 공사채형 펀드를 운용하는 펀드 매니저들도 그 펀드의 취지 및 약관에 맞추어 매입채권의 만기를 제한할 필요가 있다. 연기금 펀드의 매니저는 주로 장기 채권에 투자하게 된다. 이 경우 수익률 곡선의 형태는 장단기 금리의 유기적 관계에 의해서가 아니라 각 만기별로 독립적인 채권시장에서의 수요와 공급에 의하여 결정된다. 그러므로 시장분할 가설에 따르면 상향, 하향, 수평, 그리고 언덕형 수익률 곡선이 모두 실현될 수 있다. 그러나 독립성 가정은 일부 만기채의 수익률 상승이 상이한 만기채들의 수익률 상승을 유발하지 않기 때문에 과거 채권시장에서 나타난 상이한 만기채들이 같은 유형으로 움직이는 현상을 설명하지 못하는 약점을 갖고 있다.

마. 선호시장 가설(Preferred Habitat Hypothesis)

기대가설과 시장분할 가설은 모두 다양한 형태의 수익률 곡선 유형을 이론적으로 설명해준다는 장점은 가지고 있지만 동시에 두 이론은 과거 실제 시장에서 나타난 일부 현상을 설명하지 못한다는 약점도 지니고 있다. 선호시장 가설은 이런 두 이론의 약점을 보완한 것이다. 즉 선호시장 가설에 의하면 장기채의 수익률은 그 채권의 만기동안에 발생하는 단기 수익률의 평균에 동 채권에 대한 수요와 공급요인을 반영한 유동성 프리미엄을 더한 것과 같다. 즉 이 가설은 투자자들은 선호하지 않는 만기의 채권에 투자하는 것에 대해 위험을 느끼기 때문에 기본적으로 자신이 선호하는 만기의 채권에 투자한다는 가설이다. 그러나 자신이 선호하지 않는 만기의 채권이라도 적절한 위험 프리미엄이 제시되는 경우에는 투자할 수 있다는 점에서 시장분할 가설과는 다르다. 또 투자자가 선호하는 채권시장이 단기 채권시장인 경우 선호시장 가설과 유동성선호 가설은 동일한 결론에 이르게 된다. 이러한 면에서 유동성 선호가설은 선호시장가설의 특별한 경우라고 할 수 있다. 선호시장 가설에 따르면 상향, 하향, 수평 및 언덕형 수익률 곡선이 모두 실현될 수 있다.

4. 통계적 수익률 곡선 추정 방법[3)]

앞에서 우리는 간단한 채권의 유통 자료로부터 yield curve를 구하는 bootstrap 방법을 살펴보았다. 그러나 실제 유통되는 채권을 살펴보면 같은 잔존만기를 가지는 여러 가지 채권이 존재하고, 이러한 채권들은 다른 가격으로 거래되는 것이 일반적이다. 따라서 yield curve를 이표채의 만기수익률을 이용하여 표시하지 못하는 주된 이유는 동일한 만기기간을 가진 이표채라 하더라도 만기수익률이 시장에서의 금리 수준뿐만 아니라 특정 채권의 이표에 따라 달리 계산되어지기 때문이다. 그러므로 이 절에서는 이러한 복잡한 데이터로부터 yield curve를 추정하는 방법에 관해서 살펴보자.

가. 추정의 기본 원리

금리 기간구조(term structure of interest rates) 추정의 기본전제는 一物一價의 法則(law of one price)이 채권시장에서 성립한다는 것이다 즉 채권에서 지급하기로 약속한 이자 C (Coupon)와 원금 M 등의 현금흐름(cash flow)을 갖는 이표채의 가격이 동일한 현금흐름을 발생하게 만든 무이표채의 포트폴리오의 가격과 동일해야 한다는 것이다 이것이 의미하는 바는 채권의 가치가 화폐의 시간가치를 나타내는 현재가치요인에 의해서만 결정되고 유동성이나 세금과 같은 비현재 가치요인에 의해서는 영향을 받지 않음을 의미한다.

따라서 일물일가의 법칙 하에서 채권가격과 현물금리는 불가분의 관계를 이루고 있다. 따라서 채권가격은 현물금리 혹은 할인함수를 이용하여 표현할 수 있으며 일반적으로 수익률곡선은 할인함수 혹은 현물금리 곡선함수를 모델화해서 구한다.

할인함수 혹은 현물금리 함수를 모델화하는 접근방법은 크게 통계적 방법과 채권가격의 모델을 찾는 이론적 방법 두 가지로 나눌 수 있다. 첫 번째 통계적 방법은 한 시점 t에서의 할인함수 $d(t, \tau)$ 혹은 현물금리 함수

3) 한국산업은행, 『한국의 채권시장과 수익률 곡선』, 2000, pp. 85~118.

$i(t,\tau)$가 만기 (τ)의 함수임을 이용하여 만기에 대한 일반화된 함수를 이용하여 근사치(approximation)를 구하는 방법들이다. 대표적인 예로는 3차 스플라인(cubic spline), 지수 스플라인(exponential spline), B-스플라인(B-spline) 방법 등을 들 수 있다. 두 번째 채권가격의 모델을 찾는 이론적 방법은 수익률 곡선에 영향을 미치는 요인(factor)의 동적모델(dynamics)을 바탕으로 시장에서 무차익거래이익이 발생하지 않도록 하는 채권가격의 모델을 찾는 방법이다. 이의 대표적인 예로 Cox, Ingersoll, Ross(1985)의 모델을 들 수 있다.

이론적 접근법과 통계적 접근법은 할인함수 혹은 현물금리 함수를 모델화한다는 점에 있어서는 동일한 목적을 가지지만 다음과 같은 점에서 차이를 가진다. 첫째 통계적 접근법은 단지 금리 기간구조에 대해서 일반화된 함수를 이용하여 수익률 곡선을 추정하기 때문에 실제가격의 대부분을 설명해 줄 수 있는 편리성을 가졌다. 그러나 이론적 접근법은 채권가격에 영향을 미치는 주요 요인의 동적모델에 대해 특정한 가정을 전제로 무차익(no-arbitrage) 모델을 유도한다는 점에서는 우수하나 동적모델의 현실성에 문제점이 있다. 둘째, 통계적 접근법은 이론적 접근법에 비해서 실제가격과 좀 더 잘 부합되지만 변화에 대해서 일관성 있는 설명을 할 수 없는 단점을 가진 반면에, 이론적 접근법은 비록 실제가격에 대한 정합성에서 통계적 접근법에 비해 떨어지지만 변화에 대해서 일관성 있는 설명을 할 수 있다는 장점이 있다.

일반적으로 이론적 접근법과 통계적 접근법은 상호보완적이며 외국의 채권시장에 대한 연구에서는 통계적 접근법을 이용하여 매일의 수익률 곡선을 구한 후, 이를 바탕으로 소수의 모수(parameter)를 가지는 이론적 모델에 대한 타당성을 연구하는 것이 일반적인 과정이다.

나. Nelson & Siegel 추정방법

Nelson & Siegel(1987)은 비스플라인(Non-splines)방법으로 할인함수 혹은 수익률곡선을 단순한(parsimonious) 함수형태로 추정하는 방법을 제안하였다. 순간선도 금리가 두 개의 같은 해를 갖는 2차 차분방정식의 해로 가정함으로써 Nelson & Siegel은 다음과 같은 선도금리함수를 설정하였다.

$$f(t,\tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{\tau}{\delta_1}} + \beta_2 \frac{\tau}{\delta_1} e^{-\frac{\tau}{\delta_1}} \qquad \text{(수식 2)}$$

(수식 2)에서 추정해야 할 모수는 $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \delta_1)$ 이며 τ 는 선도계약의 결제일이다. 여기에서 사용한 채권 데이터는 단기의 무이표채권에 대한 데이터만을 사용하였으며 이 데이터를 이용하여 할인함수의 모수인 $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \delta_1)$ 를 채권가격 오차에 대한 최소자승법을 이용하여 구한다. 이 방법은 spline 방법을 사용하지 않았기 때문에 전체적인 yield curve의 모양이 spline 방법을 사용한 것 보다는 굴곡이 심하지 않다는 장점은 있으나 단기의 채권 유통 데이터로부터 장기의 yield curve를 구해야 한다는 단점이 있다.

이 방법의 특징은 선도금리의 함수를 수준(Level), 기울기(slope), 그리고 곡도(curvature)의 3가지 요소로 가정하고 있는 점이다. 일반적으로 수익률곡선의 변화는 수준, 기울기, 그리고 곡도의 3가지 요인(factor)에 의해 대부분 설명되어지는 것으로 알려져 있는 바, Nelson & Siegel 방법이 단순한 함수형태로도 다양한 수익률곡선을 만들 수 있는 이유는 바로 이 3가지 요인을 모델에 포함하고 있기 때문이다.

즉 우변의 첫 번째 상수항 β_0 는 선도금리의 장기적 수준을 나타낸다. 즉 결제일이 무한히 커짐에 따라서 순간선도금리 f 가 β_0 의 값으로 점근적으로 수렴한다. 이는 선도금리 곡선이 τ 가 증가할수록 점근적(asymptotically)으로 평탄한(flat)형태를 가짐을 의미한다. 둘째 항 $\beta_1 e^{-\frac{\tau}{\delta_1}}$은 선도금리의 기울기(slope)를 나타내는 것으로 τ 가 증가함에 따라 단조 감소 (β_1이 음수일 경우에는 단조 증가)하게 된다. 셋째 항 $\beta_2 \frac{\tau}{\delta_1} e^{-\frac{\tau}{\delta_1}}$은 곡도(curvature)를 나타내는 것으로 언덕형모양이나 U자형(β_2가 음수일 경우)의 선도금리곡선을 갖게 한다. Nelson & Siegel 모델에서 τ 가 0으로 수렴하는 경우, f(0)는 순간현물금리를 의미하며 f(0)의 값은 $\beta_0 + \beta_1$으로 수렴한다. 따라서 Nelson & Siegel 모델에서 β_0 는 선도금리의 장기적 수준(level)을, $\beta_0 + \beta_1$ 은 초단기 금리를 의미하고, β_0 와 $\beta_0 + \beta_1$ 은 0보다 큰 값이어야 한다. 그리고 δ_1이 반드시 양수

의 값을 가져야 하는데 이는 장기 선도금리가 무한정으로 증가하는 것을 방지하기 위해 필요한 제약이다.

Nelson & Siegel 방법에서 현물금리와 할인함수는 (수식 3), (수식 4)과 같이 표현된다.

$$i(t, T, \theta) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\delta_1}{\tau}[1 - \exp(-\frac{\tau}{\delta_1})] - \beta_2 \exp(-\frac{\tau}{\delta_1}) \quad \text{(수식 3)}$$

$$d(t, t+\tau, \theta) = \exp[-\beta_0\tau - (\beta_1 + \beta_2)\delta_1(1 - \exp(-\frac{\tau}{\delta_1})) + \beta_2\tau\exp(-\frac{\tau}{\delta_1})] \quad \text{(수식 4)}$$

장기선도금리 수준은 β_0 에 해당되며, 기울기는 수준과 초단기 금리의 차이인 $\beta_0 - (\beta_0 + \beta_1)$ 즉, $-\beta_1$ 이 된다. 그리고 곡도는 β_2에 해당된다. 현물금리함수 즉 수익률곡선 함수 $i(t, T, \theta)$를 수준(level:L), 기울기(slope:S) 그리고 곡도(curvature:C)로 다시 나타내면 다음과 같다.

$$i(t, \tau, \theta) = L + (-S + C)\frac{\delta_1}{\tau}[1 - \exp(-\frac{\tau}{\delta_1})] - C\exp(-\frac{\tau}{\delta_1}) \quad \text{(수식 5)}$$

다. 3차 다항 스플라인 방법

완만한(smooth)함수의 근사치(approximation)를 구하는데 일반적으로 스플라인 함수가 가장 널리 사용된다. 스플라인 함수를 많이 사용하는 이유는 원하는 수준의 작은 오차 안에서 일정한 구간(compact set)에서 연속함수의 근사치를 구할 수 있는 함수군이 존재한다는 Weierstrass' Approximation Theorem[4)]이 있기 때문이다. 이 스플라인 함수는 McCulloch(1975) 이래 가장 널리 사용되고 있는 추정방법이다.

다항 스플라인 방법의 원리를 이해하기 위하여 다음의 그림과 같은 형태의 미지의 함수에 대한 근사치를 스플라인 함수를 이용하여 구하는 경우를 고려해보자.

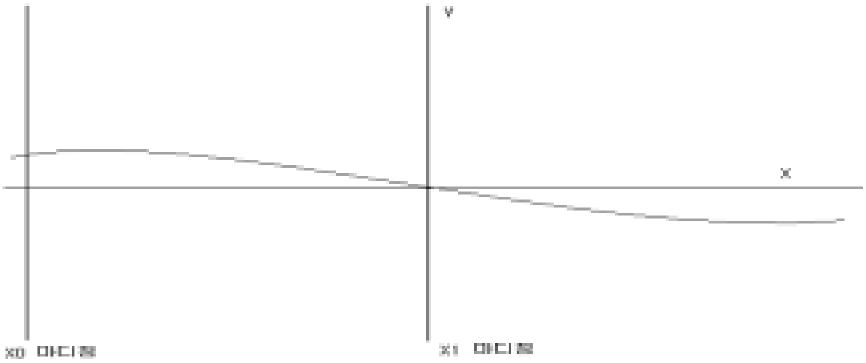
<그림 Ⅲ-2>에서 X축은 X_1을 기점으로 두 개의 구간으로 나눌 때 X_0, X_1은 흔히 마디점(knot points)이라 한다. 마디점을 이용하여 구간별 근사함수를

---

4) Robert G. Bartle, *Introduction to Real Analysis* , Hoboken : Wiley, 1999, pp.171.

회귀모델의 형태로 나타내면 다음과 같다.

<그림 Ⅲ - 2> 다항스플라인 방법



$$f(X) = [a_1 + b_1(X - X_0) + c_1(X - X_0)^2 + d_1(X - X_0)^3]D_1 + \qquad \text{(수식 6)}$$

$$[a_2 + b_2(X - X_1) + c_2(X - X_1)^2 + d_2(X - X_1)^3]D_2$$

$$D_1 = \begin{cases} 1 \text{ if } X_0 \le X < X_1 \\ 0 \text{ if } X \ge X_1 \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 0 \text{ if } X_0 \le X < X_1 \\ 1 \text{ if } X \ge X_1 \end{cases}$$

여기에서 D_1 과 D_2는 일종의 의사변수(dummy variables)를 나타낸다.

마디점을 이용한 구간별 근사함수를 위와 같이 표현하는 경우 식에 제약을 하지 않으면 근사함수가 마디점에서 불연속적이며 연속적이더라도 부드러운 연결이 되지 않아서 1차 및 2차 도함수 역시 불연속적이다. 따라서 함수의 연속성과 1차 및 2차 도함수들의 연속성을 보장해주기 위해서는 다음의 세 조건이 필요하다.

1) $a_2 = a_1 + b_1(X_1 - X_0) + c_1(X_1 - X_0)^2 + d_1(X_1 - X_0)^3$

2) $b_2 = b_1 + 2c_1(X_1 - X_0) + 3d_1(X_1 - X_0)^2$ (수식 7)

3) $c_2 = c_1 + 6d_1(X_1 - X_0)$

(수식 7)의 1)에서 X_1에서의 연속성을 보장하고 (수식 7)의 2)와 3)에서 1차

및 2차 도함수들의 연속성을 보장함으로서 (수식 7)은 근사함수를 완만하게 만드는 역할을 하고 있다.

(수식 6)가 8개의 계수를 가지는 회귀모델이지만 (수식 7)에 의해서 계수 a_2 , b_2 , c_2는 나머지 계수에 의해서 표현할 수 있다. 그러므로 함수의 연속성과 1차 및 2차 도함수의 연속성을 보장케 하는 3개의 제약조건을 이용해 3차 다항 스플라인 모델은 5개의 계수를 갖는 회귀모델이 되므로 3차 다항 스플라인 모델은 제약 조건을 부과한 3차 다항 회귀식으로 해석할 수 있다.

전술한 논의를 $k+1$개의 마디점을 갖는 보다 일반화된 3차 다항 스플라인 함수의 경우로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$f(X) = a_1 + b_1(X - X_0) + c_1(X - X_0)^2 + d_1(X - X_0)^3 \qquad \text{(수식 8)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (d_{i+1} - d_i)(X - X_i)^3 D_i^*$$

$$D_i^* = \begin{cases} 0 & \text{if } X < X_i \\ 1 & \text{if } X \geq X_i \end{cases}$$

일반적으로 3차 다항 스플라인 함수를 적용하는 경우에는 마디점의 수와 마디점의 위치 선정 문제를 고려하여야 한다. 마디점의 수가 많아질수록 근사함수가 원래의 함수를 더 잘 근사한다는 장점이 있으나 이 경우 근사함수가 over-fitting되어 추정함수의 형태가 너무 주름지는(wiggly) 단점이 있다. 마디점의 위치는 일반적으로는 간격이 같게 되도록 하는 경우가 있으나, 경우에 따라서는 구간에 놓여지는 자료의 수에 따라 간격을 다르게 할 수도 있다. Cross-Validation과 같은 통계적 기준에 따라 마디점의 수와 위치를 정할 수도 있으나 통상적으로는 마디점의 수와 위치 결정이 자의적으로 이루어지는 것이 보통이다.

라. 지수 스플라인 방법

Vasicek과 Fong(1982)은 할인함수가 기본적으로 만기가 증가함에 따라 지수적으로 감소(exponential decay)하는 양상을 보인다는 점에 착안하여 할인함수를 지수 스플라인(exponential spline)함수로 근사할 것을 제안하였다. 지수 스플라인은 만기를 변환하여 변환된 만기변수를 이용하여 할인함수를 추

정하는 방법으로 주어진 채권의 유통 데이터를 만족하는 할인함수의 모수를 채권가격 오차에 대한 최소자승법을 이용하여 구한다. 만기를 변환한 변환변수 x 는 다음과 같이 표현된다.

$$x = 1 - e^{-\alpha\tau} \qquad \text{(수식 9)}$$

만기까지의 시간 τ에 대하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-x),\ 0 \le x \le 1 \qquad \text{(수식 10)}$$

따라서 할인함수 $d(\tau)$를 x에 관한 함수 $G(x)$로 다음과 같이 표현된다.

$$G(x) = d[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)] = d(\tau) \qquad \text{(수식 11)}$$

$\tau = 0$ 인 경우 즉 $x = 0$ 이면 $G(0) = 1$이 된다. 그리고 $\tau = \infty$ 즉 $x = 1$ 인 경우 $G(1) = 0$이 된다. 이는 지수 스플라인 방법이 현재의 1원의 가치는 1이 되고 만기가 무한히 긴 미래의 돈의 현재가치는 0이라는 조건을 자연스럽게 충족함을 의미한다.

Vasicek과 Fong(1982) 의 방법의 이해를 돕기 위해 할인함수 $G(x)$를 3차 다항함수로 근사하는 경우 각기의 마디점 구간사이에서의 할인함수 $d(\tau)$의 형태는 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$d(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\alpha\tau} + \alpha_2 e^{-2\alpha\tau} + \alpha_3 e^{-3\alpha\tau} \qquad \text{(수식 12)}$$

(수식 12)와 같이 할인함수가 지수 스플라인으로 정의되는 경우 3차 다항 스플라인의 경우에서와 같이 함수가 마디점에서 연속성을 가져야 하며 함수가 완만하기 위해서는 1차 및 2차 미분값이 마디점에서 같아야 한다는 조건을 부과할 수 있다.

Wiseman(1994)에 의하면 J.P.Morgan에서는 (수식 12)와 유사한 형태의 함수를 수익률곡선의 추정에 이용하고 있다. 구체적으로 Wiseman은 선도금리 곡선을 (수식 12)와 같은 지수함수를 이용하여 추정하였는데, 만기가 길어짐에 따라 선도금리가 유한한 값에 수렴한다는 점에서는 두가지 방법이 동일하나 Vasicek과 Fong은 할인함수에, Wiseman은 선도금리 함수에 지수함수를 적용하고 있다.

마. Maximum Smoothness 방법

Adam & van Deventer(1994)는 기존의 스플라인 방법이 할인함수에 적용됨에 따라 선도금리가 불안정하게 얻어지는 문제점을 해결하기 위하여 최대완만(maximum smoothness) 선도금리 방법을 제시하였다. 즉 $f(t,T) = -\dfrac{d'(t,T)}{d(t,T)}$의 관계식으로부터 양변을 1차 및 2차 미분하면 다음의 관계를 알 수 있다.

$$f'(t,T) = -\frac{d''(t,T)}{d(t,T)} + \frac{d'(t,T)^2}{d(t,T)^2} \qquad \text{(수식 13)}$$

$$f''(t,T) = -\frac{d'''(t,T)}{d(t,T)} + \frac{3d'(t,T)d''(t,T)}{d(t,T)^2} - \frac{2d'(t,T)^3}{d(t,T)^3} \qquad \text{(수식 14)}$$

(수식 14)에서 알 수 있듯이 선도금리 곡선의 2차 미분값이 마디점에서 같기 위해서는 할인함수의 3차 미분값이 마디점에서 같다는 조건이 성립하여야 한다. 하지만 3차 다항스플라인 방법을 할인함수의 추정에 적용하는 경우 통상적으로 2차 미분값의 연속성만을 보장하기 때문에 선도금리 곡선은 2차 미분가능한 함수가 되지 못하며 이에 따라 선도금리 곡선은 불안정하게 추정된다.

Adam & van Deventer(1994)는 수익률곡선의 추정을 위하여 4차 다항 스플라인을 선도금리 곡선의 추정에 적용하였는 바, 이는 선도금리 곡선이 2차 미분 가능할 뿐 아니라, 연속적(continuous)이고 2차 미분 가능한 함수 중 가장 완만한(smooth) 함수를 얻기 위해서이다. 즉 Adam & van Deventer는 다음의 정리가 성립함을 증명하였다.

Adam & van Deventer의 정리 : $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = T$이 주어져 있을 때, (수식 19)의 4차 다항 스플라인 함수는 (수식 15)의 최대완만성(maximum smoothness) 기준을 충족시키는 선도금리 곡선이다.

$$\min \int_0^T [f'(s)]^2\, ds \qquad \text{(수식 15)}$$

$$f(\tau) = e_i\tau^4 + d_i\tau^3 + c_i\tau^2 + b_i\tau^1 + a_i \quad (\tau_{i-1} < \tau < \tau_i,\ i = 1, \dots, m+1) \qquad \text{(수식 16)}$$

여기서 (수식 19)의 $f(\tau)$의 계수들인 e_i, d_i, c_i, b_i, a_i는 다음의 조건식들을 만족하여야 한다.

$$e_i\tau_i^4 + d_i\tau_i^3 + c_i\tau_i^2 + b_i\tau_i + a_i$$
$$= e_{i+1}\tau_i^4 + d_{i+1}\tau_i^3 + c_{i+1}\tau_i^2 + b_{i+1}\tau_i + a_{i+1},\ (i=1,\ldots,m)$$
$$4e_i\tau_i^3 + 3d_i\tau_i^2 + 2c_i\tau_i + b_i$$
$$= 4e_{i+1}\tau_i^3 + 3d_{i+1}\tau_i^2 + 2c_{i+1}\tau_i + b_{i+1}\ (i=1,\ldots,m)$$
$$12e_i\tau_i^2 + 6d_i\tau_i + 2c_i = 12e_{i+1}\tau_i^2 + 6d_{i+1}\tau_i + 2c_{i+1} \quad (i=1,\ldots,m)$$
$$24e_i\tau_i + 6d_i = 24e_{i+1}\tau_i + 6d_{i+1} \quad (i=1,\ldots,m)$$
$$e_i(\tau_i-\tau_{i-1})^5 + d_i(\tau_i-\tau_{i-1})^4 + c_i(\tau_i-\tau_{i-1})^3 + b_i(\tau_i-\tau_{i-1})^2 + a_i(\tau_i-\tau_{i-1})$$
$$= (-\frac{P_i}{P_{i-1}}) \quad (i=0,\ldots,m)$$

P_i 와 P_{i-1} 은 만기가 각각 τ_i 와 τ_{i-1} 인 무이표채의 가격이다. 첫 번째 조건식은 함수의 마디점에서의 연속성을 보장하기 위한 조건이고 나머지 조건식들은 함수의 1차, 2차, 3차 미분값이 마디점에서 연속성을 충족하기 위한 조건이다. 마지막의 조건식은 $d(\tau)=\exp[-\int_0^\tau f(s)\,ds]$ 의 조건식으로부터 실제 관측하게 되는 무이표채의 가격 P_i 와 P_{i-1}을 이용하여 얻을 수 있는 다음의 조건으로부터 얻어진다.

$$P[\tau_i] = P[\tau_{i-1}]\exp(-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(s)\,ds)$$

바. B-스플라인 방법

3차 다항 스플라인을 이용하여 수익률곡선을 추정하는 경우 다항식의 항들에 사이에 상관관계가 높아 다중공선성(multi-colinearity)의 문제가 발생하고 추정치가 수치적으로 불안정할 수 있기 때문에 이 문제점을 해결하기 위한 방안으로 B-스플라인 방법이 고안되었다. 기존의 다항 스플라인 방법은 단항식들의 일종의 선형결합(linear combinations)으로 간주할 수 있는데 이 단항

식들을 베이시스(basis)로 삼아 근사함수를 얻는 방법이 B-스플라인 방법이다.

사. 추정시 고려사항

수익률 곡선을 추정하기 위한 여러 방법들이 소개되었는데 실제 수익률 곡선의 추정시 고려하여야 할 사항들을 요약하면 다음과 같다.

1) 근사함수 : 수익률곡선의 추정을 위해서는 위에서 언급된 여러 가지 방법을 이용해서 할인함수 혹은 선도금리 함수 혹은 로그-할인함수를 추정할 수 있다. 일반적으로 어떤 함수를 근사할 것인가는 수익률 곡선을 추정하는 이유에 따라 달라질 수 있으며, 어느 경우에 좀 더 합리적인 경계조건을 부과할 수 있는 지를 고려하여야 한다. 특히 할인함수를 3차 다항 스플라인을 이용하여 근사하는 경우 음의 선도금리 문제가 발생하여 무의미한 수익률 곡선을 얻는 경우가 있다.

2) 마디점의 수와 위치 : 3차 다항 스플라인을 적용하는 경우 마디점의 수와 마디점의 위치 선정이 중요한 과제로 남는데 마디점의 수는 추정하여야 할 모수의 갯수를 결정한다는 점에서 추정 시 중요한 과제이다. 만약 마디점의 수가 많으면 자료를 좀 더 정확히 근사할 수 있으나 수익률 곡선이 합리적으로 기대할 수 있는 경우에 비해 너무 주름지는(wiggly) 경향이 있다. 그리고 자료와 너무 일치시키는 경우 선도금리가 부의 값을 가지게 되거나 혹은 선도금리 곡선이 너무 불안정해지는 문제점이 있다. 마디점의 위치는 통상적으로 등 간격을 사용하나 주어진 자료의 만기에 따라 마디점의 위치를 바꾸기도 한다. 일반적으로 마디점의 위치가 변곡점이 되는 경우가 가장 좋은 것으로 되어있으나 사전에 이를 알 수 없기 때문에 이는 시행오차(trial and error)에 의해 결정할 수도 있다. 마디점의 수나 위치선정의 자의성을 줄이기 위해 cross-validation과 같은 통계적 기준을 적용할 수도 있다.

Ⅳ. 금리시나리오 및 생성모델의 종류

금리는 금리관련 금융상품이나 미래 현금흐름의 현가 계산을 위해서 필수적이다. 그러나 금리 기간구조의 형태는 시간이 지남에 따라 상향에서 하향 또는 수평 등으로 여러 가지 형태로 계속 변하는 것이 일반적이다. 그러므로 현재의 금리 기간구조가 알려져 있다고 하더라도 그 형태로서 계속 유지되는 것이 아니기 때문에 현재의 금리 기간구조로 평가한 금융상품의 가치가 계속 맞는 것이 아니다. 따라서 향후 금리의 변화를 추정하는 금리 모델 또는 금리시나리오가 필요하다.

1. 금리시나리오의 종류

금리 시나리오는 결정론적 시나리오(혹은 비확률론적 시나리오)와 확률론적 시나리오(Stochastic Scenario)로 구분되어진다. 결정론적 시나리오는 시간에 따른 금리의 변화를 미리 정해놓는 것으로서 과거의 경험에 기초하여 여러 가지 상황을 가정한다. 확률론적 시나리오는 금리는 위너과정(Wiener Process)을 한다는 가정 하에서 시작한다

가. 결정론적 시나리오

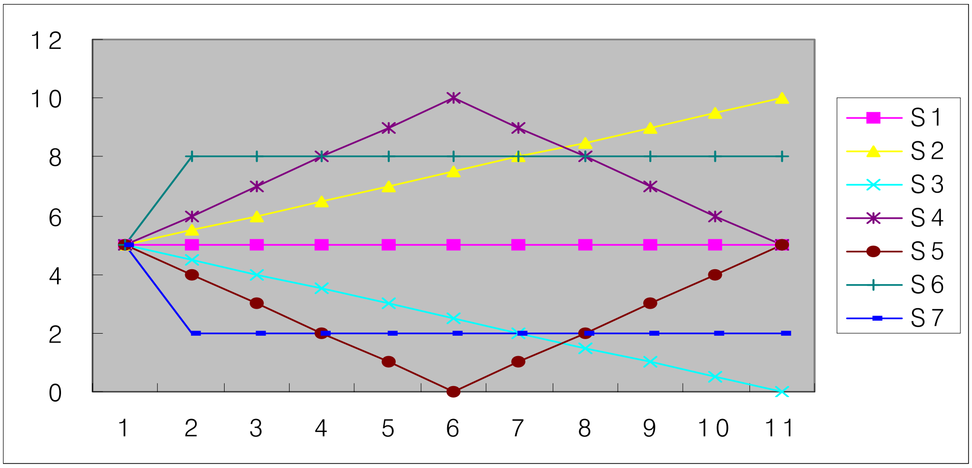
금리 시나리오의 결정론적 시나리오는 분석가 또는 관련업무 종사자의 요구에 맞게 여러 가지 상황을 설정하는 것이다. 단 설정 시 낙관적인 상황과 비관적인 상황 그리고 중간에 해당하는 평균적인 상황 등을 고려한다. 더 나아가서 과거의 경험에 비추어서 금리가 올라가다가 내려가던가 혹은 내려가다가 올라간다는 여러 가지 상황을 설정할 수 있다. 특히 과거의 경험에 기초해서 변동성을 고려한다. 그리고 급격한 금리의 변동등을 포함으로서 Stress Test를 시행하기도 한다. 그러나 이 방법은 시나리오를 결정하는 사람의 주관성이 너무 많이 결과에 반영됨으로써 신뢰도에 한계를 가진다. 그리고 각각의 시나리오를 결정해야 하는 번거로움도 단점으로 지적된다.

그러나 금리 변화에 따른 민감도 분석(Sensitivity Analysis), 극단 상황분석

(Stress Test)등에 효과적으로 사용될 수 있기 때문에 현재 미국 뉴욕 주 규정 제 126조(New York regulation 126)의 7개의 금리시나리오(일명 NY 7 시나리오)가 대표적으로 예로서 사용되고 있다. 현재 업계에서 사용되고 있는 많은 계리소프트웨어(예 : ALFA, MOSES 등)에는 NY 7 시나리오가 내장되어 있다.

NY 7 시나리오는 1) 변화없음, 2) 향후 10년 동안 매년 0.5%p 증가, 3) 향후 10년 동안 매년 0.5%p 감소, 4) 향후 5년 동안 매년 1.0%p 증가한 후 5년 동안 매년 1.0%p 감소, 5) 향후 5년 동안 매년 1.0%p 감소한 후 5년 동안 매년 1.0% p 증가 6) 초년도 3.0%p 증가 후 일정하게 유지 7) 초년도 3.0%p 감소 후 일정하게 유지 로 구성되어 있다.

<그림 Ⅳ - 1> 뉴욕 7 금리 시나리오



나. 확률론적 시나리오(Stochastic Scenario)

최근 컴퓨터의 발달로 많이 사용되어지고 있는 방법론으로서 결정론적 시나리오에 비해 복잡하지만 다양한 금리 시나리오가 생성 가능하다는 장점을 가지고 있다. 확률론적 시나리오 생성 과정에서 나오는 모수들은 과거 경험자료를 바탕으로 산출되어진다. 모수들이 일단 결정되어지고 나면 위너과정

(Wiener Process)을 통해서 다양한 금리 시나리오가 생성되어진다.

그러나 변동성과 추세에 의해서 만들어지는 금리 시나리오는 비현실적인 금리가 생성될 수 있다. 일부 확률론적 시나리오 생성 모델은 음의 금리를 생성하기도 한다. 비록 최근 일본에서 마이너스 금리가 일시적으로 발생하였지만 심각한 고려대상이 아닌 상황에서는 음의 금리 시나리오는 원래 시나리오를 분석하는 목적에 어긋날 수도 있다.

따라서 이러한 여러 가지 상황을 고려해서 여러 가지 형태를 가진 확률론적 시나리오 생성모델들이 연구되어 왔다. 마이너스 금리 생성의 문제점을 해결하는 모델에서부터 비정상적인 금리생성을 제거하는 평균회귀특징을 가지는 모델까지 연구되어지고 있다. 대표적인 확률론적 시나리오생성 모델로서는 Ho-Lee 모델, Vasicek 모델, CIR 모델 등이 있다.

2. 시나리오 선택

결정론적 시나리오는 일관성 있는 분석이 가능하다는 장점이 있다. 시나리오가 한번 결정되면 그 시나리오에 따라 분석하기 때문에 매번 분석 시 과거의 분석과 비교가 용이하다는 장점이 있다. 단지 위에서 언급되었듯이 결정론적 시나리오는 다양한 시나리오를 분석할 수 없다는 단점이 있다. 이에 반해 확률론적 시나리오는 다양한 시나리오를 분석 할 수 있지만 결정론적 시나리오에 비해 많은 시간이 소요된다는 것이다. 그리고 확률론적 시나리오 생성을 위해서 다소 복잡한 작업과 이를 위한 소프트웨어의 지원이 필요하다는 문제점이 있지만 최근 들어 컴퓨터 등 장비의 발전에 의해서 많은 개선이 이루어지고 있다. 채권의 가치 평가 또는 미래의 현금 흐름 등을 분석할 시 분석의 목적에 맞추어서 결정론적 시나리오나 확률론적 시나리오를 선택하여야 할 것이다. 결정론적 시나리오를 통해서도 Stress Test 등을 수행할 수 있기 때문에 확률론적 시나리오가 절대적으로 우수한 것은 아니다.

3. 금리모델의 종류

금리모델은 금리의 미래의 변화를 표현한 것이다. 그러나 최근의 금리는 과

거보다 더 불확실성을 가지고 움직이고 있다. 그러므로 금리모델은 이 불확실성에 대한 예측이 주요 관건이 될 것이다. 금융시장에서 요구하는 금리모델은 이 불확실성의 예측에 있어서 두 가지 측면을 요구한다. 첫째는 무차익거래이다. 무차익거래란 다른 두 가지 방법으로 하나의 금융상품의 가격을 평가했을 때 같은 가격을 가져야 한다는 것으로 일반적으로 차익거래가 발생하게 되면 필요 자본없이 이익을 얻을 수 있기 때문에 실제 금융시장에서는 차익거래가 발생하면 곧바로 많은 시장참여자들에 의해서 사라지게 된다. 그러므로 금리모델에서도 이러한 성질이 반영되어져야 할 것이다. 둘째는 실제 금융시장에서 거래되고 있는 실제 값과 일치하여야 하는 것이다. 실제 값과 괴리가 발생한다면 실제시장에서 사용하는데 한계가 발생하기 때문이다. 따라서 금리모델이 무차익 거래와 실제 값과의 일치 조건을 만족시키지 못한다면 일반적인 문제 해결에 있어서 신뢰성이 떨어지게 되고 아주 제한된 범위내에서만이 사용되게 될 것이다. 그러나 두 가지 조건을 동시에 만족시키는 것은 한계가 있기 때문에 일반적으로 금리모델은 크게 무차익모델(No Arbitrage Model)과 시장균형모델(Equilibrium Model)로 구분되어진다.

가. 시장균형모델(Equilibrium Model)

시장균형모델(Equilibrium Model)은 경제적 변수에 대한 가정을 가지고 시작한다. 즉 금리의 함수로서(혹은 상태변수(state variable)) 시장의 기초적인 움직임을 묘사하는 것이다. 따라서 시장에서 주어지는 실제 정보와는 무관하게 독립적으로 Yield Curve를 생성하게 된다. 따라서 모델을 통해 추정된 현재의 Yield Curve는 실제 Curve와 다를 수 있으며 현재 시장에서 형성되고 있는 채권의 가격과 상당히 다른 채권의 가격이 나올 수도 있다. 그러므로 실제 시장참여자들에게 있어서 이 모델을 사용하는데 제약을 가지게 된다.

그러나 시장균형 모델은 시장에서 거래되는 채권들의 적정가격을 제시한다는 장점을 가지고 있다. 실제 거래되고 있는 가격과 무관하게 적정가격을 제시함으로써 과대 혹은 과소 계산되었는지를 평가를 할 수 있는 것이다. 그리고 일반적으로 과거 금리 기간구조의 변화를 잘 설명하는 것으로 알려져 있다. 더 나아가서 현재 시장의 정보가 부족하거나 신뢰도가 떨어질 경우 과거

의 경험으로부터 산출되어지는 시장균형모델이 선호될 수 있다.

이 모델의 대표적인 것들로 CIR모델, Vasicek 모델을 들 수 있다.

나. 무차익 모델(No Arbitrage Model)

무차익 모델(No Arbitrage Model)은 현재의 Yield Curve와 정확히 일치하게 하는 기법이다. 즉 모델을 통해서 산출된 채권가격과 실제 채권시장에서 거래되는 채권의 가격이 일치하도록 설계된 모델이다. 그러나 시장균형모델(Equilibrium Model)과는 반대로 채권의 적정가격을 결정하는데 큰 도움을 주지 못한다는 단점이 있다.

시장균형모델(Equilibrium Model)과 무차익모델(No Arbitrage model)의 가장 큰 차이점은 시장균형모델에서는 오늘의 Yield Curve를 결과물로서 생성되지만 무차익모델(No Arbitrage Model)에서는 입력 자료로 사용되어진다는 것이다. 시장균형모델(Equilibrium Model)에서는 순간금리(short rate)의 추세부분은 시간에 관한 함수가 아니지만 무차익모델(No Arbitrage Model)에서는 시간에 관한 함수로서 표현된다.

이 모델의 대표적인 것으로 Ho-Lee 모델, Hull-White 모델 등이 알려져 있다.

다. 모델의 비교

일반적으로 무차익모델(No Arbitrage Model)과 시장균형모델(Equilibrium Model)을 논하는데 있어서 함께 언급되어지는 부분은 위험중립(Risk Neutral)이다. 그러나 실제 시장은 항상 위험중립인 것은 아니다. 그러므로 위험중립 가정이 들어갈 때와 들어가지 않을 경우를 비교해서 살펴볼 필요가 있다. 위에서도 언급되었듯이 모델간의 절대적인 우위의 비교가 없는 상황에서 모델의 선택은 모델의 사용 목적에 달려있다. 그리고 사용목적이 위험중립을 필요할 수도 있고 아닐 수도 있는 것이다. 그러므로 이 절에서는 위험중립의 가정과 함께 무차익모델(No Arbitrage Model)과 시장균형모델(Equilibrium Model)을 비교해서 살펴보고자 한다.[5)]

1) 위험중립(risk neutral)가정

우리가 채권에 아주 짧은 시간동안만 투자를 한다면 거의 위험부담이 없을 것이다. 즉 순간에 적용되는 무한히 짧은 시간에 투자한다면 위험부담이 없이 순간금리를 얻을 수 있다. 그러나 실질적으로 그러한 짧은 시간은 존재하지 않으므로 모든 투자에는 시간에 따른 market risk가 생기게 된다. 즉 투자시간동안 채권 또는 금융상품의 가격이 오르거나 내려갈 가능성이 있는 것이다. 그러므로 투자자들은 무위험(risk free)이자와 함께 market risk에 대한 term premium을 요구하게 되는 것이다. 즉 특정기간동안에 현물금리는 무위험금리(risk free rate)에 금리 변동에 대한 투자자에 대해서 투자자가 위험을 감수한 것에 대한 보상으로 term premium을 더한 것으로 구성되어진다.

시점 t 에 순간금리(short rate) r_t 가 주어졌을 때 만기 T 에 1원을 지불하는 할인채권 의 가격을 $P(t, T)$로 표기하자. 그리고 $s(t, T)$를 현재시점 t 에서 기간이 $T-t$ 인 현물금리라고 하자. 그리고 $\phi(T-t)$를 기간 $T-t$ 동안 투자자가 요구하는 term premium이라고 하자. 그러면 우리는 할인채권의 가격 $P(t, T)$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(t, T) = \frac{1}{e^{s(t, T)\times(T-t)}} = \frac{1}{e^{\phi(t, T)\times(T-t)}} E\left(\frac{1}{e^{\int_t^T r_s ds}}\right) \qquad (\text{수식 17})$$

이 식의 마지막 항에서 기대값 계산 부분은 기간 $T-t$ 동안 순간금리(short rate)로 연속적으로 계속 투자를 한 것을 나타낸다. 여기서 적분 기호를 사용한 것은 순간금리가 연속적으로 계속 변화하기 때문이다. 그리고 마지막 항의 나머지 부분은 투자자가 요구하는 term premium을 나타낸다.

여기서 우리가 알 수 있는 사실은 할인채의 가격을 계산하기 위해서는 순간금리와 함께 모든 기간에 대한 term premium을 알아야 한다. 그러나 위험중립(risk neutral) 가정하에서는 다르게 계산되어 진다. 위험중립에서는 term

---

5) Frank J. Fabozzi, *Interest rate, term structure, and valuation modeling*, Hoboken : WIley 2002, pp.27～38.

premium이 사라지게 되므로 채권이나 기타 금융상품을 평가할 시에는 단지 순간금리만이 필요하게 된다. 그리고 미래현금 흐름의 현가를 계산하기 위해서 매 기간에 대한 현물금리(spot rate)에서 term premium을 구별해낼 필요는 없다. 대신 위험조정 금리모델(risk adjusted interest model)을 사용한다. 위험조정금리모델이란 순간금리(short rate)의 확률분포를 변경함으로써 만들어진다.[6] 이렇게 만들어진 순간금리는 더 이상 기존의 금리가 아니고 위험조정순간금리(risk adjusted short rate)이다.

2) 위험중립(risk neutral)과 무차익(No Arbitrage) 가정

위험중립(risk neutral)이면서 무차익(No Arbitrage) 가정은 금리 모델링에서 사람들에게 가장 선호되는 가정이다. 이 가정에서 만들어진 모델은 과거 경험데이터를 사용하기보다는 현재 시장의 정보를 이용해서 모수들을 추정하므로 현재 시장의 값에 정확히 일치한다. 그리고 금융상품 또는 채권의 가격을 평가하기 위해서 리스크를 조정한다.

3) 위험중립(risk neutral)과 시장균형(Equilibrium) 가정

무차익모델(No Arbitrage)에서는 시장의 정보를 사용하는데 이 시장의 정보가 모두 정확하다고는 할 수가 없고 또한 일부 정보는 특별한 조건에 따른 정보일 수 있지만 그것이 모든 것에 대한 정보로서 무차익모델(No Arbitrage)에서 사용되어진다. 반면에 시장균형모델(Equilibrium Model)에서는 시간의 경과에 따른 시장의 전반적인 형태를 관찰하기 때문에 무차익모델에서 발생할 수 있는 특별한 경우는 작은 오류(Noise)로서 무시할 수 있다. 따라서 위험중립과 시장균형을 가정한 모델은 현재 시장정보가 부족하거나 신뢰하기 힘들때 많이 사용되어 진다.

4) 비위험중립(realistic world)과 무차익(No Arbitrage) 가정

---

6) 부록 Ⅰ.2 Girsanov's Theorem 참조.

비위험중립과 무차익 가정의 경우 금리 모델은 먼저 현재시장의 값에 정확히 일치 시킨 후 위험을 고려한 금리를 전개하는 것이다. 이런 종류의 모델은 초기 현재 시장의 값에 정확히 일치하기 때문에 포트폴리오 전략이나 헷지전략에서 매우 중요하게 사용할 수 있다. 그러나 이 모델의 문제점은 term premium과 모델오차를 정확히 분류하는 것이 불가능하다는 것이다. 모델이 실제 term structure를 정확히 묘사하지 못한다면 term premium을 결정할 수가 없다. 그러므로 비위험중립과 무차익 가정을 고려한 모델은 현실적이지 못한 단점을 가지고 있다.

5) 비위험중립(realistic world)과 시장균형(Equilibrium) 가정

위에서 언급한 바와 같이 비위험중립과 무차익 가정의 모델이 현실적이지 못하기 때문에 Stress Test, VaR 등을 계산하기 위해서 비위험중립과 시장균형 가정의 모델을 사용하여야 한다. 그러나 시장균형모델에서 언급된 바와 같이 여기에서 산출되어지는 초기 curve는 시장의 실제 값과 일치하지 않기 때문에 비현실적일 수 있다. 그러나 시장균형모델의 사용이 시나리오 전개에 있어서 초기 값으로 현실과 다른 값을 사용하여야 할 필요는 없다. 오히려 실제 시장 값을 초기 값으로 사용하고 향후 전개되는 값을 모델을 통해서 예측할 수 있다. 시장균형모델은 term structure의 통계적인 모델이기 때문에 이렇게 하는 것이 일관성 측면에서 문제가 되지 않는다. 오히려 정확히 시장값과 예측값이 어느 정도의 오차를 보이는지 명확히 관찰할 수가 있다.

6) 모델비교

앞 절에서 무차익거래와 시장균형모델의 위험중립의 측면에서 비교해 보았다. 이를 Black-Karansinski 모델을 통해서 <표 Ⅳ-2>와 같이 요약 정리하였다. <표 Ⅳ-2>에서 보는 바와 같이 비위험중립 모델의 가장 큰 차이점은 term premium λ 의 존재 여부이고 무차익거래와 시장균형모델의 가장 큰 차이점은 시간에 관한 함수로서 모수가 표현되는 것이다.

<표 Ⅳ-1> 모델의 사용 용도

	위험중립(Risk Neutral)	비위험중립(Real World)
무차익 거래 (No Arbitrage)	시장정보가 충분 또는 신뢰할 수 있는 경우	term premium의 정확한 산출 불가능으로 비현실적
시장균형 (Equilibrium)	시장정보가 불충분하거나 신뢰할 수 없는 경우	Stress Test, VaR 산출용

<표 Ⅳ-2> Black-Karasinski 모델 의 예

	위험중립(Risk Neutral)	비위험중립(Real World)
무차익 거래 (NoArbitrage)	$d(\ln u) = \kappa(t)(\theta(t) - \ln\mu)dt + \sigma(t)d\tilde{z}$	$d(\ln u) = \kappa(t)(\theta(t) - \lambda(\ln\mu, t) - \ln\mu)dt + \sigma(t)dz$
시장균형 (Equilibrium)	$d(\ln u) = \kappa(\theta - \ln\mu)dt + \sigma d\tilde{z}$	$d(\ln u) = \kappa(\theta - \lambda(\mu) - \ln\mu)dt + \sigma dz$

σ는 순간금리(short rate)의 순간변동성을 나타내고 κ는 평균회귀율을 나타낸다. θ는 장기적인 평균회귀수준을 나타내고 그리고 λ는 term premium을 나타낸다.

Peter Fitton과 James F. McNatt의 논문에서 언급된 것처럼 무차익 모델은 한 장의 동물사진을 가지고 사진과 똑같이 생긴 동물로봇을 만드는 것이고 시장균형 모델은 동물의 행동을 관찰하고 동물로봇을 만드는 것과 같다. 따라서 동물처럼 보이는 것은 전자일 것이고 동물처럼 행동하는 것은 후자일 것이다. 동물처럼 생기기만 한 로봇을 원하는 사람은 전자의 로봇을 선호할 것이고 동물처럼 행동하기를 원하는 사람은 후자의 로봇을 선호할 것이다. 금리 모델도 마찬가지로 원하는 목적에 따라서 무차익 모델 또는 시장균형 모델을 선택하면 될 것이다.

Ⅴ. 금리 시나리오 모델

1. 기초개념

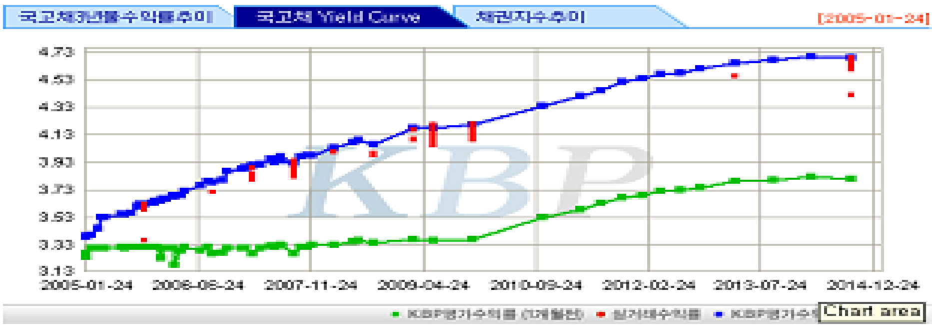
가. 금리 기간구조

시장에서 거래되는 무이표 채권의 수익률을 계산해 보면 만기별로 채권은 다른 수익률을 가지는데 이렇게 지급불능 위험 및 세금 등 채권의 수익률에 영향을 미치는 여러 가지 요인중에서 모든 것은 다 똑같고 잔존만기만 다른 경우 만기까지의 기간과 채권의 수익률과의 관계를 나타낸 것이 채권수익률의 금리 기간구조(Term Structure)라고 한다. 그리고 채권수익률의 기간구조를 그래프로 나타낸 것을 수익률곡선(Yield Curve)이라고 부른다.

금리의 예측은 주가처럼 한 개의 값을 예측하는 것이 아니라 만기별로 금리 예측을 해야 하는 어려움이 있다. 즉 수익률 곡선 전체가 어떻게 시간에 따라 변하게 될 것인가를 예측해야 한다. 이것은 수익률 곡선의 형태를 예측하여야 한다는 것이다. 수익률곡선은 각 시점별로 수익률과 일대일대응(One to One Correspondence)한다. 현재 시점의 수익률 곡선과 1년 후 시점의 수익률 곡선은 다르기 마련이다. 수익률 곡선의 형태는 현재의 경제상황이나 미래의 경제상황 예측에 따라 다양하게 나타난다. 동일한 수익률곡선 상의 위치가 시점에 따라 변화하게 되고 특정 미래시점의 금리 수준에 대한 현재 시점의 예측치와 1년 후의 예측치가 동일할 수는 없고 그래서 수익률 곡선의 형태도 각 시점별로 변화하게 된다. <그림 Ⅴ-1>에서 보는 바와 같이 우리나라 국고채 수익률 곡선에서도 한 달 동안에 큰 변화가 있음을 관찰할 수 있다.

금리 기간구조는 채권시장에서 각 만기별로 기준금리의 성격을 가질 뿐만 아니라, 기업의 실물투자 결정이나 정부의 통화신용정책과 관련하여서도 중요한 의미를 지닌다. 기업이 실물투자 결정을 하기 위해서는 투자안의 현금흐름을 미래의 각 시점별로 추정하여 현재가치로 전환시키는 과정이 필요한데, 이때 기간구조는 미래의 각 시점별 현금흐름에 적용되어야 할 할인율의 기준금리를 제공한다.

<그림 Ⅴ-1> 국고채 Yield Curve



자료 : 한국채권평가원(http://www.koreabp.com/) 2005. 1. 24

나. 금리 변동 요인 분석금리

위에서 언급하였듯이 금리의 수익률곡선은 랜덤하게 움직인다. 각각 만기에서의 금리들은 랜덤하게 움직이는 확률변수로서 파악할 수 있는데, 서로 다른 만기의 금리들은 서로 완전한 상관관계를 가지고 움직이는 것은 아니다. 모든 만기에 대한 금리의 상관관계를 분석할 수는 없다. 따라서 보통 대표적인 만기의 금리에 대해서 상관관계를 분석하게 되는데 이 경우에 사용되어지는 것이 주성분분석(Principal Component Analysis)이다. 이 분석을 통하여 금리 곡선 전체의 움직임을 지배하는 요소를 찾아볼 수 있을 것이다.

Nun과 Webber는 1988년부터 1995년까지의 영국의 자료를 가지고 분석을 하였다. 만기는 3개월, 6개월, 1년, 2, 3, 4, 5, 7, 그리고 10년의 swap rate를 사용하였다. 그 결과 3개월, 6개월, 그리고 1년이 전체 변동성의 약 90%를 설명하였다. 1994년부터 2000년까지의 미국 국채 만기 6개월, 1년, 2, 3, 5, 7, 그리고 10년 자료를 가지고 똑같은 분석을 하였을 경우 처음 3가지 요소 즉 6개월, 1년, 2년이 변동성의 97% 이상을 설명하였다. 따라서 전체 수익률곡선(Yield Curve)의 움직임을 설명하기 위해서 정보의 손실이 거의 없이 변수의 갯수를 줄일 수가 있다.

불확실성을 나타내는 변수의 수를 한 개로 해서 만든 금리 모델을 one-factor 모델이라 한다. 이 방법에서는 모든 만기의 금리가 완전한 상관관

계를 가진다는 가정이다. 그러나 실제로는 모든 만기의 금리가 완전한 상관관계를 가지지 않기 때문에 필요에 따라서는 two-factor 또는 multi-factor 모델을 고려한다.

다. 금리 시나리오의 변동성 및 원칙

금리의 변동은 불규칙하게 변하는 것으로 간주하여 랜덤변수를 이용하여 산출하지만 그러나 일반적으로 시장에서 관찰되는 몇 가지 특징이 있다. 첫째, 금리는 평균회귀의 성질을 가진다는 것이다. 현재 시장의 금리가 장기금리 또는 일반 시장에서 생각하는 평균적인 금리보다 큰 차이를 보일 경우 금리는 평균값으로 회귀하는 성질을 가진다는 것이다. 둘째, 서로 다른 만기의 금리는 양의 상관관계를 가진다는 것이다. 그렇지만 완전한 상관관계를 가지는 것은 아니다. 금리 시나리오 모델링에서 one-factor 모델을 사용할 경우는 모든 만기는 완전한 상관관계를 가진다는 가정을 전제하고 있다. 셋째, 금리는 음수가 될 수 없다. 최근 일본에서 일시적으로 음의 금리가 형성되었지만 일반적으로 금리는 음수가 될 수가 없다. 그러나 금리 시나리오의 사용 목적에 따라서 음의 금리가 의미를 가진다고 판단될 경우에는 음의 금리를 생성하는 모델을 사용할 수 있을 것이다. 대표적인 모델로서는 Ho-Lee 모델이 음의 금리를 생성시킨다. 넷째, 금리의 변동성은 금리의 수준에 비례한다. 높은 수준의 금리일 경우 그만큼 금리의 변동성은 커질 것이다. 과거 외환위기 당시 급격한 금리의 변동을 통해서 실증되었다.

금리의 변동에 대한 이러한 4가지 특징을 바탕으로 금리 시나리오모델을 생성할 경우 다음과 같은 4가지 원칙을 지켜야만 한다. 첫째, 실제상황에서 발생가능한 모든 상황을 포함하여야 한다(Flexibility). 모델을 통해서 생성되는 시나리오가 특정형태의 시나리오만을 생성한다면 시나리오를 통해서 다양한 상황을 분석하려는 의도에 어긋나게 되는 것이다. 둘째, 적절한 시간 내에 산출이 가능하도록 간단해야 한다.(Simplicity) 최근의 컴퓨터의 발전으로 시간적으로 많이 개선되었지만 그러나 여전히 수백, 수천가지의 시나리오를 생성할 경우 상당한 시간이 걸리는 것이 현실이다. 따라서 모델의 복잡성으로 인해서 산출하는데 너무 많은 시간이 걸린다면 사용하는데 한계가 있을 수밖

에 없을 것이다. 셋째, 시나리오 산출에 필요한 입력정보가 명확하여야 한다.(Specification) 입력정보가 명확하게 정의되지 못한다면 매번 시나리오 산출을 위해서 데이터를 입력할 경우에 심한 편차를 보일 것이고 따라서 결과에 신뢰성을 가질 수 없을 것이다. 넷째, 결과값은 현실적이어야 한다.(Reality) 시나리오 생성모델을 통해서 산출되어진 시나리오들이 현실적으로 불가능한 모습으로, 예를 들어 지나치게 높은 금리를 생성한다면 사용하는데 한계를 가질 수 밖에 없을 것이다.

라. 확률미분방정식

금리시나리오는 확률미분방정식(SDEs, Stochastic differential Equations)을 이용하여 모델링 되어진다. 따라서 금리 시나리오의 모델을 다루는데 있어서 중요한 개념인 순간금리 r_t(short rate), 선도금리 $f(t,T)$ (forward rate), 그리고 채권가격 $P(t,T)$ 을 확률미분방정식의 측면에서 살펴보자.

여기에서는 모든 확률변수는 확률공간 (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) 에서 정의되어지고 $\{\ \widetilde{W}(t) : 0 \le t < \infty \}$를 이 확률공간에의 브라운(Brown)운동이라고 하자. 그러면 순간금리, 선도금리 그리고 채권가격은 다음과 같은 확률미분방정식으로 표현될 수 있다.

- 순간금리 : $dr(t) = \widetilde{\mu}(t)\,dt + \sigma(t)\,d\widetilde{W}(t)$ (수식 18)
- 선도금리 : $df(t, T) = \alpha(t, T)\,dt + \sigma(t, T)\,d\widetilde{W}(t)$ (수식 19)
- 채권가격 : $\dfrac{dP(t, T)}{P(t, T)} = m(t, T)\,dt + v(t, T)\,d\widetilde{W}(t)$ (수식 20)

마. 마팅게일 측도

앞에서 다룬 확률미분방정식은 확률측도 $\mathbb{P}$에서 정의되어 졌다. 이 확률측도 $\mathbb{P}$에는 어떤 조건도 부가되지 않았다. 그러나 자산이나 파생상품의 가격을 계산하기 위해서 시장에 차익거래가 없다는 가정을 하게 된다. 채권시장이 무차익거래시장이라는 가정을 했을 때 모든 만기의 채권가격을 마팅게일로 만들어 주는 확률측도 $\mathbb{Q}$가 존재하는데 이를 위험중립확률측도(risk neutral masure) 또는 마팅게일 측도(martingale measure)라고 부른다. 금리

기간구조에서 차익거래가 없게 될 필요충분조건은 마팅게일 확률측도 $\mathbb{Q}$가 존재하는 것이다.

확률측도 $\mathbb{P}$에서 채권가격의 확률미분방정식은 (수식 20)에서 표현되었다. 이를 마팅게일 확률측도 $\mathbb{Q}$에 대해서 표현하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)\,dt + v(t, T)\,dW(t) \qquad \text{(수식 21)}$$

여기서 $W(t)$는 $\mathbb{Q}$-브라운 운동이다. 또한 순간금리(short rate)도 확률측도 $\mathbb{Q}$에 대해서 표현하면 다음과 같이 표현된다.

$$dr(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) \qquad \text{(수식 22)}$$

역시 마찬가지로 $W(t)$는 $\mathbb{Q}$-브라운 운동이다.

Girsanov 정리에 의해서 주어진 확률측도 $\mathbb{P}$의 브라운운동의 $\widetilde{W}(t)$로부터 dt의 계수(추세부분, drift)를 조정하여 새로운 확률측도 $\mathbb{Q}$에 대한 브라운 운동 $W(t)$를 만들어 낼 수 있다. 또한 새로운 확률측도 $\mathbb{Q}$에 대해서 만기 T를 갖는 채권의 가격 $P(t, T)$는 다음과 같은 미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP \qquad \text{(수식 23)}$$

$$P(T, T) = 1$$

여기서 μ는 순간금리(short rate)의 확률미분방정식 (수식 18)로부터 나온다.

바. 위험가격 (Market Price of Risk)

만기 T를 갖는 무이표 채권의 가격 $P(t, T)$가 가격을 생각하는 시점 t, 채권의 만기 T, 순간금리(short rate) $r(t)$에 의해서만 결정된다고 가정하자. 서로 다른 만기 T_1과 T_2 $(T_1 < T_2)$ 인 두 개의 채권을 생각해 볼 때 두 채권 가격의 불확실성은 둘 다 $r(t)$ 로부터 나오기 때문에 두 채권의 상관관계는 1이 된다. 즉 T_1과 T_2를 임의로 택할 수 있으므로, 모든 만기의 채권은 가격을 생각하는 시점 t 를 고정시킨다면 모두 완전한 상관관계를 가지는 것이

다. 따라서 두 채권으로 구성되어 있는 무위험 포트폴리오(즉 랜덤 요소가 없는)를 만들 수 있다.

Ito's formula[7]에 의해서 채권가격 $P(t,\ T)$ 는 $dr = (a\,dt + b\,d\,W)$ 일 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dP = [\frac{\partial P}{\partial t} + a\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}]dt + b\frac{\partial P}{\partial r}dW \qquad (\text{수식 } 24)$$

또는 $$dP = P(t,\ T,\ r)[\ m(\ t,\ T,\ r)\ dt + S(\ t,\ T,\ r)dW] \qquad (\text{수식 } 25)$$

이다. 여기서

$$m(t,\ T, r) = \frac{1}{P}[\ \frac{\partial P}{\partial t} + a\ \frac{\partial P}{\partial r} + \ \frac{1}{2}\ b^2\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\ ] \qquad (\text{수식 } 26)$$

$$S(t,\ T, r) = \frac{1}{P}\ b\ \frac{\partial P}{\partial r}$$

이다.

시점 t 에서의 포트폴리오가 두 개의 채권으로 만기 T_1 인 채권은 $-V_1(t)$, 만기 T_2 인 채권은 $V_2(t)$ 만큼 가지고 있는 것으로 가정하자. 그럼 시간이 t 에서 $t+dt$ 로 변할 때 순간투자이익은

$$-\ \frac{V_1(t)}{P(t,\ T_1)}d\,P(\ t,\ T_1) + \ \frac{V_2(t)}{P(t,\ T_2)}d\,P(\ t,\ T_2) \qquad (\text{수식 } 27)$$

$$= -\ V_1(t)(m_1\,dt + S_1\,d\ W) + \ V_2(t)(m_2\,dt + S_2\,d\ W)$$

$$= (V_2\,m_2 - \ V_1 m_1)dt + (V_2\,S_2 - \ V_1 S_1)d\,W$$

이다.

단, 각각의 $i = 1,\ 2$ 에 대해서 $m_i = m(t,\ T_i,\ r(t))$ 와 $S_i = S(t,\ T_i,\ r(t))$이다.

이 포트폴리오가 불확실성을 갖지 않도록 하기 위해서는 모든 t 에 관해서 랜덤(random) 요소인 (수식 27)의 dW 앞에 있는 항 $V_2 S_2 - V_1 S_1$ 이 0

7) 부록 I.3 Ito's formula 참조.

이라고 가정하면 된다. 즉

$$\frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \frac{S(t, T_2, r(t))}{S(t, T_1, r(t))} = \frac{S_2}{S_1} \qquad \text{(수식 28)}$$

그리고

$$V_2 m_2 - V_1 m_1 = \frac{S_1 V}{S_1 - S_2} m_2 - \frac{S_2 V}{S_1 - S_2} m_1. \qquad \text{(수식 29)}$$

$$V = V_2 - V_1$$

그러면 이 포트폴리오의 순간투자이익은 불확실성이 사라진 $V(\frac{m_2 S_1 - m_1 S_2}{S_1 - S_2})dt$ 이다. 한편, 채권시장에서 무차익거래(No-arbitrage)가정에 의해서 이 포트폴리오의 수익률은 무위험금리인 순간금리(short rate) r_t 가 되어야 한다. 즉 짧은 시간 dt 동안의 이 포트폴리오의 수익률은 $r_t dt$ 가 되고 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{m_2 S_1 - m_1 S_2}{S_1 - S_2} = r_t \quad \text{또는} \quad \frac{m_1 - r}{S_1} = \frac{m_2 - r}{S_2}. \qquad \text{(수식 30)}$$

이것은 임의의 두 만기 T_1, T_2에 관해서 항상 성립한다. 따라서 임의의 T에 대해, 만기 T를 갖는 채권의 가격 $P(t, T)$에 대해 확률미분방정식을 다음과 같이 쓴다면

$$dP = P(t, T, r)[\, m(t, T, r)\, dt + S(t, T, r)\, dW] \qquad \text{(수식 31)}$$

다음 식은 만기 T와 관계없이 일정한 값이어야 한다.

$$\frac{m(t, T, r(t)) - r(t)}{S(t, T, r(t))} = \gamma(t, r(t)) \qquad \text{(수식 32)}$$

따라서 모든 T에 대해 일정한 값을 갖는 이 값을 우리는 위험가격(market price of risk) $\gamma(t, r(t))$ 라고 하고 이의 존재를 증명하였다.

(수식 32)에서 $\gamma(t, r(t))$ 는 $m(t, T, r(t)) - r(t)$를 분자로 가진다. 여기서 $m(t, T, r(t))$는 만기 T 채권의 단위 수익률이다. 그리고 $r(t)$는 무위험자산의 수익률이다. 따라서 두 값의 차이 $m(t, T, r(t)) - r(t)$는 만기 T 채권의 무위험금리에 대한 초과분으로 이 채권에 대한 위험프리미엄(risk premium)으로 생각할 수 있다. 이것은 차익거래를 제거하기 위해서 시장에서 요구되어지는 만기 T 의 위험채권에 대한 초과 수익률을 의미한다. $\gamma(t, r(t))$ 는 $S(t, T, r(t))$ 를 분모로 가지는데 이것은 만기 T 채권의 변동성(volatility)을 의미한다. 그러므로 market price of risk $\gamma(t, r(t))$ 는 단위 변동성에 대한 위험보험료(risk premium per unit of volatility)를 의미한다. 위에서 보였듯이 시장에 arbitrage가 없을 때, 모든 만기의 채권은 같은 market price of risk를 갖는다.8)

2. Affine 모델

가. 개요

확률측도 $\mathbb{Q}$에 대해서 순간금리(short rate)은 일반적인 형태는 다음과 같이 표현된다.

$$dr(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) \qquad \text{(수식 33)}$$

(수식 33)의 μ 와 σ 가 순간금리(short rate) r_t 에 대한 일차식으로 표현될 때, 그 모델은 일반적으로 계산하기 좋은 구조를 가지게 된다. 여기서는 그런 특성을 가지는 모델에 대해서 살펴보겠다.

정의 : 만기 T 인 채권가격 $P(t, T)$ 가 다음의 형태로 표현되면 affine 모델이라고 한다.

$$P(t, T) = e^{-A(t, T) - B(t, T) r_t} \qquad \text{(수식 34)}$$

실제로는 지수가 선형이므로 지수선형(exponential affine) 모델이라고 부르기도 한다. 여기서 $A(t, T)$ 와 $B(t, T)$는 t 와 T 에 관한 함수이다. 채권의

8) 정확히는 모든 채권에 동일한 확률측도를 적용할 경우에 성립함.

가격 $P(t, T)$를 알고 있으면, 이것으로부터 현물금리(spot rate) $r_t(T)$는 채권가격 $P(t, T)$과의 관계식

$$P(t,T) = e^{-r_t(T)(T-t)} \qquad \text{(수식 35)}$$

으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$r_t(T) = \frac{1}{T-t}A(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r_t \qquad \text{(수식 36)}$$

affine 모델은 오래전부터 연구되어 왔다. Vasicek (77년), Longstaff and Schwartz (92), 그리고 Hull and White (93) 등이 대표적인 모델이다. affine 모델이 널리 사용되는 이유는 다루기가 쉽다는 것과 그리고 응용력이 뛰어나다는 것이다. Longstaff and Schwartz 모델과 같은 경우 채권과 채권옵션의 가격을 정확히 산출해낼 수 있다. 그리고 금리 모델이 affine 구조를 갖고 있으면, 채권 가격에 대한 식이 정해지므로 계산하기가 편리해진다.

그래서 affine 모델은 Brown 과 Schaefer (94년)에 의해 처음으로 하나의 유형으로 분류되어 연구되어지기 시작했고 Duffie와 Kan (94년)에 의해서 일반이론이 연구되어졌다. 그리고 (수식 36)이 affine 모델이 되기 위한 μ 와 σ 에 대한 충분조건이 알려져 있다.

정리 : 마팅게일 확률 측도 $\mathbb{Q}$ 와 $\mathbb{Q}$-브라운 운동 $W(t)$를 사용해 만든 다음과 같은 순간금리(short rate) 모델에 대해

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \qquad \text{(수식 37)}$$

μ 와 σ 가 다음과 같은 형태이면

$$\mu(t, r(t)) = \alpha(t)r + \beta(t) \qquad \text{(수식 38)}$$

$$\sigma(t, r(t)) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}$$

그러한 모델은 affine term structure를 갖는다. 즉 채권의 가격 $P(t, T)$는 적당한 t 와 T 의 함수 $A(t,T)$ 와 $B(t,T)$ 에 대해, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P(t,T)=e^{-A(t,T)-B(t,T)r_t} \qquad \text{(수식 39)}$$

증명 : 먼저 채권의 가격에 대한 편미분 방정식을 생각하자.

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\mu\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0 \qquad \text{(수식 40)}$$

$$P(T,T)=1$$

여기에 (수식 42)를 대입하기 위해서 먼저 다음과 같은 계산을 한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t}=(-A_t(t,T)-B_t(t,T)r_t)e^{-A(t,T)-B(t,T)r_t} \qquad \text{(수식 41)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r}=-B(t,T)e^{-A(t,T)-B(t,T)r_t}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}=B(t,T)^2e^{-A(t,T)-B(t,T)r_t}$$

이것을 (수식 40)에 대입하면, $e^{-A(t,T)-B(t,T)r_t}$ 은 0이 될 수 없으므로 약분하고 나면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$(-A_t(t,T)-B_t(t,T)r)+\mu(-B(t,T))+\frac{1}{2}\sigma^2B(t,T)^2-r=0 \qquad \text{(수식 42)}$$

이 식에 μ 와 σ 에 관한 식을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(-A_t(t,T)-B_t(t,T)r)+(\alpha(t)r+\beta(t))(-B(t,T))+\frac{1}{2}(\gamma(t)r+\delta(t))B(t,T)^2-r=0$$

이 수식을 r 에 관해서 정리를 하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$-(1+B_t(t,T)+\alpha(t)B(t,T)-\frac{1}{2}\gamma(t)B(t,T)^2)r-A_t(t,T)-\beta(t)B(t,T)+\frac{1}{2}\delta(t)B(t,T)^2=0$$

모든 t, T와 r 에 대해서 이 수식이 성립해야 하므로 다음을 만족한다.

$$1 + B_t(t, T) + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B(t, T)^2 = 0 \qquad \text{(수식 43)}$$

$$-A_t(t, T) - \beta(t)B(t, T) + \frac{1}{2}\delta(t)B(t, T)^2 = 0$$

(수식 40)으로부터 (수식 43)의 미분 방정식의 초기 조건값

$$A(T, T) = 0, \;\; B(T, T) = 0 \qquad \text{(수식 46)}$$

을 구할 수 있다. 따라서 주어진 $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ 에 대해 먼저 $B(t, T)$를 구하고 그 다음에 $A(t, T)$를 구할 수 있다. 즉 채권 가격 $P(t, T)$가 (수식 39)를 만족하는 $A(t, T)$ 와 $B(t, T)$가 존재함을 알 수 있고 따라서 affine 모델이 됨을 알 수 있다.

시간함수인 $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$에 대해 $A(t,T)$, $B(t,T)$를 구하는 것은 일반적으로 해석적인(Analytical) 방법으로 구하는 것은 쉽지 않다. 그러나 $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ 가 상수 일 때는 정확한 값을 구할 수 있다.

나. Affine 모델의 종류

1) Gaussian affine 모델

<표 Ⅴ-1> Gaussian affine 모델들

개발자(개발년도)	factor 수
Vasicek (77)	1
Hull and White (90)	1
Steeley (91)	2
Chen and Yang (96)	3
Beaglehole and Tenney (91)	n
Babbs (93)	n
Babbs and Nowman(99)	n
Nunes (98)	n

Gaussian affine 모델은 다음과 같은 모델을 가진다.

$$dr = (ur + v)dt + \sigma dz \qquad \text{(수식 47)}$$

단, σ 는 상수 또는 시간 t 의 함수이다.

Gaussian affine 모델은 다루기가 쉽지만 음(−)의 금리를 가지는 약점을 가지고 있다. 그래서 실제 적용에 있어서 음(−)의 값이 발생했을 경우 강제적으로 0의 값을 대입하는 것과 같은 방법으로 사용하기도 한다.

다음은 대표적인 Gaussian affine 모델들이다

2) CIR Affine 모델

CIR affine 모델은 다음과 같은 모델을 가진다

$$dr = (ur + v)dt + \sigma\sqrt{r}dz \qquad \text{(수식 48)}$$

단, σ 는 상수 또는 시간 t 의 함수이다.

CIR affine 모델은 Gaussian affine 모델보다는 다루기가 쉽지가 않다 그러나 Gaussian affine 모델과 달리 음(−)의 값을 가지지 않는 장점을 가지고 있다.

3) Three Factor Affine 모델

Gaussian 모델과 CIR 모델을 혼합한 형태의 모델들로서 다음의 3가지 factor 에 관해서 모델을 가진다.

<표 Ⅴ-2> CIR affine 모델들

개발자(개발년도)	factor 수
CIR (85)	1
Hull and White (90)	1
Jamshidian (95)	1
Pelsser (96)	1
Maghsoodi (96)	1
Longstaff (90)	1
Feldman (93)	1
Richard (78)	2
Longstaff and Schwartz (92)	2
Chen and Scott (92)	2
Nielsen and Saa-Requejo (93)	2

- 순간금리(short rate) : $dr = \alpha(\mu - r)dt + \sqrt{v}\,dz_r$ (수식 49)

- 추세(drift) : $d\mu = \beta(\gamma - \mu)dt + \eta\mu^{\phi}dz_{\mu}, \qquad \phi = 0, \frac{1}{2}$ (수식 50)
- 변동성(Volatility) : $dv = \delta(\kappa - v)dt + \lambda\sqrt{v}\,dz_{v}$ (수식 51)

<표 Ⅴ-3> Three factor affine 모델들

개발자(개발년도)	factor	ϕ
Sorensen (94)	$dr,\ d\mu$	0
Balduzzi, Das, Foresi, Sundaram (96)	$dr,\ d\mu$	0
Fong and Vasicek (91)	$dr,\ dv$	~
Chen (96)	$dr,\ d\mu,\ dv$	1/2
Rhee (99)	$dr,\ d\mu,\ dv$	1/2

다. one-factor affine 모델들

금리의 변동요인을 하나의 요소로서 가정함으로써 모든 만기의 금리는 완전한 상관관계를 가진다고 가정한다. 변동요인을 한 개의 요소로서 파악함으로써 다루기가 간단한 장점을 가지고 있다. one-factor affine 모델은 일반적으로 다음과 같은 미분방정식을 일반적으로 만족한다.

$$dr = (\theta(t) + c(t)r)dt + \sigma(t)r^{\gamma}dz \qquad \text{(수식 52)}$$

단, γ = 0 또는 1/2 이다.

1) Ho-Lee 모델

널리 사용되고 있는 Ho-Lee 모델은 one factor affine 모델로서 Ho 와 Lee에 의해서 1986년에 제안된 최초의 무차익거래(No-arbitrage) 모델이다[9]. Ho와 Lee는 두 개의 모수 즉 순간금리(short rate)의 표준편차와 시장가격(market price)을 가지고 채권가격을 이항모델(binomial tree)을 통해서 모델을 구현하였다. 연속모델은 상수 변동성(volatility) σ 와 추세함수 $\theta(t)$로 구성되어 있고 (수식 52)에서 γ = 0 이다.

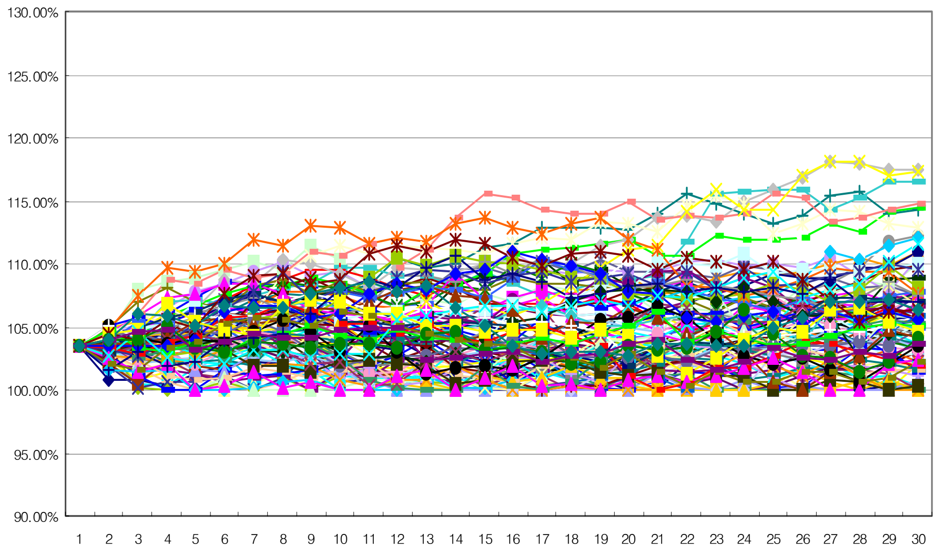
9) 부록 Ⅱ.1 Ho-Lee 모델 참조.

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \qquad \text{(수식 53)}$$

여기서 변동성(volatility) σ 는 순간금리(short rate)의 순간표준편차이고 상수이다. 그리고 추세함수 $\theta(t)$는 초기 금리기간구조와 모델을 일치시키는 시간함수(function of time)이다. 추세함수 $\theta(t)$는 시간에 따른 금리 r 의 움직임의 평균적인 방향을 제시한다. 이것은 금리 r 의 수준과는 무관하게 움직이는 단점을 가지고 있다.

Ho and Lee 모델은 다루기가 쉬운 무차익거래(no-arbitrage) 모델이다. 그래서 금리의 실제 기간구조에 정확히 맞도록 만들기가 쉽다. 그러나 이 모델의 단점은 음(-)의 금리를 가질 수 있다는 것과 그리고 평균회귀현상(mean reversion)을 가지고 있지 않다는 것이다. 그리고 (수식 53)에서 볼 수 있는 것처럼 어느 순간의 금리가 높던 낮던 그에 상관없이 항상 같은 평균적인 방향을 제시한다. 그래서 실제 응용에 있어서는 임의적인 조정 즉 예를 들어 $r := \max(r, 0)$ 같은 방법으로 조정하기도 한다. 그러나 이럴 경우 채권 및 옵션 가격에 어느 정도의 영향을 미칠 수가 있을 것이다.

<그림 Ⅴ-2> Ho-Lee 모델



그러나 항상 금리가 양수일 필요가 없고 그리고 실제 시장에서 가끔 목격되

어지는 음(−)의 금리가 의미가 있다고 판단된다면 그런 경우에 대비해서 Ho-Lee 모델의 사용은 의미를 가질 수 있을 것이다. <그림 Ⅴ-2>는 Ho-Lee 금리 시나리오에 의해서 100개의 시나리오를 그린 것이다. 보는 바와 같이는 음의 값을 생성하였고 그래서 임의적으로 0으로 처리하였다. 그리고 Ho-Lee 모델은 평균회귀성질이 없기 때문에 <그림 Ⅴ-2>에서 보는 바와 같이 시나리오들이 넓게 퍼지는 것을 볼 수 있다.

한편 Ho-Lee 모델은 현물금리(spot rate)은 정확하게 계산할 수 있는 장점이 있다.

$$r_t(\tau) = r_t - \frac{\sigma^2}{6}\tau^2 + \frac{1}{\tau}\int_t^T\int_t^s \theta(u)du\,ds \qquad \text{(수식 54)}$$

2) Vasicek 모델

Vasicek 모델은 Vasicek(1977)에 의해서 개발된 모델로서 다음과 같은 미분방정식을 만족한다.

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dz \qquad \text{(수식 55)}$$

단, α , μ 그리고 σ 는 항상 양의 상수이다.

이 모델도 affine term structure를 갖고 있으며 따라서 이 모델하에서도 채권의 가격은 선형의 형태로서 표현된다.[10)] 이것은 Ornstein-Uhlenback Process라는 이름으로 알려져 있기도 하다. 이 모델의 특징은

1) 평균회귀성질을 가지고 있고 그리고 α 는 r 의 평균회귀속도를 나타내고

2) μ 는 위험중립(risk-neutral) 장기 평균금리를 나타내고

3) σ 는 단기금리의 변동성을 나타낸다.

그리고 시간 t 에서의 $r(t)$ 이 주어졌을 때 시간 $t+s$ 에서의 $r(t+s)$는 평균 $\mu + (r(t) - \mu)e^{-\alpha s}$ 와 분산 $\frac{\sigma^2[1-e^{-2\alpha s}]}{2\alpha}$를 가지는 정규분포를 이룬다. s 가 충분히 큰 값으로 주어질 때 즉 장기로 갈 경우 $r(t)$ 의 장기표준편차(long-term standard deviation)은 $\frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}}$ 이다. Ho-Lee 모델처럼 금리의 수준

---

10) 부록 Ⅱ.2 Vasicek 모델의 affine 모델 증명 참조.

에 상관없이 변동성이 일정하다는 단점을 가지고 있다.

Ho-Lee 모델에서와 같이 Vasicek 모델에서도 현물금리(spot rate)을 정확하게 계산할 수 있다.

$$r_t(\tau) = r_\infty + (r_t - r_\infty)\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha\tau} + \frac{\sigma^2\tau^2}{4\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha\tau}\right)^2 \qquad \text{(수식 56)}$$

여기서 $\tau = T - t$이며 $r_\infty = \tilde{\mu} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$ 는 장기금리를 의미한다.

3) CIR 모델

Cox, Ingersoll, & Ross 에 의해서 제안된 CIR 모델에서는 순간금리의 확률미분방정식이 다음과 같이 주어진다.

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}\,dz \qquad \text{(수식 57)}$$

이 확률미분방정식은 Ornstein-Uhlenback Process에서와 같이 α는 단기 금리의 평균회귀속도를 나타내고 μ는 단기 금리의 안정상태의 장기평균금리를 나타낸다. 그리고 σ 는 단기금리의 변동성을 나타낸다. Ornstein-Uhlenback Process과의 차이점은 금리의 변동성이 금리 수준에 상관없이 일정한 것이 아니라 금리가 증가하면 금리의 변동성 역시 증가하는 것을 의미한다. 이를 흔히 금리의 수준효과라고 하는데 제곱근 모델에서는 금리의 분산이 금리 수준에 따라 선형관계를 가지면서 증가한다고 가정한다.

CIR 모델의 큰 특징 중 하나는 평균회귀 현상을 가진다는 것과 함께 음의 값을 만들지 않는다는 것이다. (수식 57) 양변에 $e^{\alpha t}$ 를 곱하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다

$$e^{\alpha t}(dr + \alpha r\,dt) = (\alpha\mu\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dz)e^{\alpha t} \qquad \text{(수식 58)}$$

(수식 58)에 곱에 대한 미분공식을 적용하면 다음과 같이 변형된다.

$$d(re^{\alpha t}) = \alpha\,\mu\,e^{\alpha t}dt + \sigma\sqrt{r}\,e^{\alpha t}dz \qquad \text{(수식 59)}$$

그리고 양변을 적분하여 정리하면

$$\int_0^t d(re^{\alpha s}) = \int_0^t \alpha\,\mu\,e^{\alpha s}ds + \int_0^t \sigma\,\sqrt{r}\,e^{\alpha s}dz \qquad (수식\ 60)$$

$$r(t)\,e^{\alpha t} - r(0) = \mu e^{as}|_0^t + \int_0^t \sigma\,\sqrt{r}\,e^{\alpha s}dz$$

이다. 따라서 $r(t)$에 관해서 정리하면 다음과 같다.

$$r(t) = r(0)\,e^{-\alpha t} + \mu(e^{\alpha t} - 1)e^{-\alpha t} + \int_0^t \sigma\sqrt{r}\,e^{-\alpha(t-s)}dz \qquad (수식\ 61)$$

(수식 61)의 우변의 첫 번째 항은 항상 양의 값을 가진다. 그리고 둘째 항도 α가 양수이고 t가 시간이므로 항상 양수이므로 둘째항도 항상 양의 값을 가진다. 그리고 셋째 항도 적분인자들이 항상 양수이기 때문에 적분 값도 양수가 된다. 따라서 CIR 모델은 항상 양의 금리를 생성한다.

CIR 모델에서의 채권가격은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(t,\,T) = A(t,\,T)\,e^{-B(t,\,T)\,r(t)} \qquad (수식\ 62)$$

여기서

$$B(t,\,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \qquad (수식\ 63)$$

$$A(t,\,T) = [\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}]^{2ab/\sigma^2}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

이다.

4) Hull-White(Extended Vasicek) 모델

Hull과 White에 의해서 발표된 Vasicek 모델의 확장형으로 기존의 Vasicek 모델과 달리 이 모델은 무차익거래(No-Abitrage)모델이다. 따라서 시장의 수익률 곡선에 정확히 맞출 수 있는 장점이 있다. Hull-White 모델의 확률미분방정식은 다음과 같다.

$$dr = (\theta(t) - ar)\,dt + \sigma\,dz \qquad (수식\ 64)$$

여기서 a와 σ는 상수이다. Ho-Lee 모델과 유사하지만 Ho-Lee 모델과 달리

평균회귀성질을 가진다. 따라서 만약 $a=0$ 이면 Ho-Lee 모델이 된다.

Hull-White 모델에서의 채권가격은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \quad \text{(수식 65)}$$

여기서

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \quad \text{(수식 66)}$$

$$\ln A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - B(t,T)\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})(e^{2at}-1)$$

이다.

3. HJM 모델

앞에서는 순간금리(short rate) r_t 를 유일한 설명 변수로 갖는 금리 모델들에 관해서 살펴보았다. 그러나 실질적으로 채권시장전체가 하나의 설명변수에 의해서 설명되지 않고 있으므로 이러한 불합리한 상황을 극복하기 위해서 one-factor 모델 대신 two factor 또는 multi-factor 모델을 사용하기도 한다. 그러나 이에 따른 반대급부로서 모델자체가 복잡하게 됨으로써 사용하기에 어려움을 가져오게 되었다.

그래서 이에 대한 대안으로서 Heath, Jarrow, Morton은 모든 만기의 forward rate들이 설명변수가 되는 HJM 모델을 제안하였다. 이 모델은 무차익거래(No-arbitrage) 가정하에서 적용된다. 따라서 마팅게일 모델링에 대해서만 고려하면 된다[11]. HJM 모델에 의해서 만들어지는 순간금리(short rate)은 path-dependent 또는 Non-Markov이다.[12] 즉 미래의 짧은 시간동안의 금리 r 의 확률론적 행태(stochastic behavior)를 알려면 우리는 단지 지금의 r 값 뿐만이 아니라 이 값에 도달하게 된 경로도 알아야만 한다.

가. one-factor 모델

11) No-Arbitrage 와 Martingale 측도가 존재한다는 것은 동일한 개념임.
12) 부록 Ⅱ.4 HJM 모델의 Non-markovian 증명 참조.

채권시장에 마팅게일 측도 $\mathbb{Q}$가 주어졌을 때 one-factor HJM 모델은 선도금리(forward rate)에 대해서 다음과 같은 확률 미분 방정식을 가정한다. 각각의 $T > 0$ 에 대해서,

$$df(t, T) = \alpha(t, T, \omega)\, dt + \sigma(t, T, \omega)\, dW_t \qquad \text{(수식 67)}$$

여기서 W_t 는 $\mathbb{Q}$- Brown 운동이다. 그리고 ω 는 Sample 공간 Ω 의 한 원소이다. (수식 67)을 적분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T, \omega)\, ds + \int_0^t \sigma(s, T, \omega)\, dW_s \qquad \text{(수식 68)}$$

그리고 선도금리와 순간금리의 관계에 의해서 현물금리(spot rate)과 채권가격의 식들을 얻을 수 있다.

$$r_t(T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f_t(s)\, ds \qquad \text{(수식 69)}$$

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f_t(s)\, ds} \qquad \text{(수식 70)}$$

채권 가격은 위에서 보인 것처럼 선도금리(forward rate)로 표현할 수 있다. 따라서 선도금리(forward rate)을 정하는 것은 채권가격을 정하는 것과 같아진다. 그리고 이 식들을 이용해서 순간금리(short rate)의 확률미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$dr_t = df_t(t) \qquad \text{(수식 71)}$$

$$= d[f(0,t) + \int_0^t \alpha(s, t, \omega)\, ds + \int_0^t \sigma(s, t, \omega)\, dW_s$$

$$= df(0,t) + \alpha(t, t, \omega)\, dt + \left(\frac{\partial}{\partial T}\int_0^t \alpha(s, T, \omega) ds\right)\Big|_{T=t}\, dt$$

$$+ \sigma(t, t, \omega)\, dW_s + \left(\frac{\partial}{\partial T}\int_0^t \sigma(s, T, \omega) dW_s\right)\Big|_{T=t}\, dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}(f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, T, \omega) dW_s)|_{T=t} dt$$

$$+ \alpha(t, t, \omega) dt + \sigma(t, t, \omega) dW_s$$

$$= \frac{\partial}{\partial T} f_t(T)|_{T=t} dt + \alpha(t, t, \omega) dt + \sigma(t, t, \omega) dW_s$$

따라서 순간금리(short rate) r_t 는 다음과 같이 표현된다.

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, t, \omega) dW_s \qquad \text{(수식 72)}$$

나. 추세(drift) α 와 변동성(volatility) σ의 관계

Heath , Jarrow, 그리고 Morton은 추세와 변동성에 대해서 다음과 같은 놀라운 결과를 밝혀냈었다. 즉 선도금리(forward rate)의 확률미분방정식 (수식 67)의 두 모수 $\alpha(t, T)$와 $\sigma(t, T)$의 관계를 살펴보면 다음과 같은 결과를 가진다.[13)]

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, x) dx \qquad \text{(수식 73)}$$

즉 $\alpha(t, T)$는 위와 같이 $\sigma(t, T)$에 관한 식으로 표현된다. 이것은 $\alpha(t, T)$는 $\sigma(t, T)$만 정해주면 된다는 것을 의미한다. $\sigma(t, T)$값만 정해지만 $\alpha(t, T)$ 값은 유일하게 결정된다. 확률미분방정식에서 확률측도를 바꿀 때 추세(drift)항만 바뀔 뿐 변동성(volatility)항은 변하지 않는다. 이것은 $\sigma(t, T)$는 관측측도 $\mathbb{P}$에 대해 생각하든, 마팅게일 측도 $\mathbb{Q}$에 대해 생각하든 변함이 없다는 것을 의미한다. 즉, $\alpha(t, T)$가 $\sigma(t, T)$에 의해서 결정되므로 HJM 모델에서는 확률측도에 영향을 받지 않는다는 것을 의미한다.

다. HJM 모델 예 : Ho-Lee 모델I

최초의 무차익거래(No-arbitrage)모델인 Ho-Lee 모델도 HJM 모델의 한 예임을 알 수 가 있다. HJM 모델의 선도금리(forward rate)에 관한 식

$$df_t(T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t \qquad \text{(수식 74)}$$

---

13) 부록 Ⅱ.3 HJM 모델에서 추세와 변동성의 관계 참조.

에서 변동성(volatility) $\sigma(t, T)$를 상수 σ로 함으로서 Ho-Lee 모델을 만들 수 있다. 무차익거래(No-arbitrage) 조건하에서 주어진 상수 변동성(volatility) σ에 대해서 항상 $\alpha(t, T)$가 다음과 같이 존재한다.

$$\alpha(t, T) = \sigma \int_t^T \sigma\, ds \;= \sigma^2 (T - t) \qquad \text{(수식 75)}$$

그럼 $df_t(T) = \sigma^2 (T - t) dt + \sigma(t, T) dW_t$ 의 양변을 적분을 하면

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{1}{2} t\right) + \sigma W_t \qquad \text{(수식 76)}$$

이다. 그리고 (수식 72)에 의해서 순간금리(short rate)을 구할 수 있다.

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \sigma^2 (t - s) ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \qquad \text{(수식 77)}$$

$$= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \sigma W_t$$

라. HJM 모델 또 다른 예 : 기타 함수형들

(수식 73)에 의해서 HJM모델은 $\sigma(t, T, \omega)$에 의해서 전적으로 결정이 된다. 따라서 여러 가지 종류의 $\sigma(t, T, \omega)$들이 연구되어졌고 다음과 같은 함수들에 대해서 많은 연구가 이루어졌다.

1) $\sigma(t, T, \omega) \equiv \sigma$ 상수

이 함수의 경우는 위에서 살펴본 Ho-Lee 모델에 해당이 된다.

2) $\sigma(t, T, \omega) \equiv \sigma e^{-\lambda(T-t)}$, σ, λ 상수

이 함수의 경우는 Vasicek 모델에 해당이 된다.

3) $\sigma(t, T, \omega) \equiv \sigma \sqrt{r_t}\, 4\delta^2 e^{\delta(T-t)} / (\phi(e^{\delta(T-t)} - 1) + 2\delta)^2\, \delta$, ϕ 상수

이 함수의 경우는 CIR 모델에 해당이 된다.

4. Consol 모델

Consol 모델은 금리 시나리오 모델에 장기금리를 포함하려는 시도에 근거한다. Affine 모델에서 현물금리를 구할 수 있어서 지금은 affine 모델에서 장기의 만기 현물금리를 이용함으로써 장기금리에 대한 예측을 가능하게 하지만 affine 모델이 나오기 전에는 Consol 모델에 의해서 장기금리를 예측하였다.

원래 consol은 영구채(consol bond)에 기원한다. 즉 원금은 상환하지 않고 일정한 쿠폰 이자만을 영구히 지급하는 채권이다. 유명한 consol bond로서는 Elsken Jorisdochter이 1624년 Lekdyk Bovendams로부터 구입한 영구채이다. 3백년이 지난 시점까지 계속 이자를 지급하고 있다.

모델링을 위해서 몇 가지 이상적인 가정이 필요하다. consol 금리(consol rate) l_t 는 단위기간당 고정금리 c 로 연속 복리로 이자(coupon)를 지급하는 Non-callable인 영구채권(perpetual)의 만기수익률로 가정한다. 그러면 이상적인 Consol의 현재가격은 다음과 같이 표현된다.

$$P_\infty = \int_0^\infty c e^{-l_t s} ds = \frac{c}{l_t} e^{-t l_t} \qquad \text{(수식 78)}$$

$c = 1$ 로 가정하자. 그러면 P_∞ 는 단지 l_t 하나만의 함수로서 표현되고 따라서 l_t 의 위험가격(Price of risk) λ_t를 구할 수 있다.

최초의 Consol모델은 Brennan과 Schwartz 그리고 Schaefer와 Schwartz에 의해서 만들어졌으나 Hogan은 그의 논문에서 Brennan과 Schwartz의 어떤 특정 모델의 경우에는 100% 확률로 금리가 무한대로 증가함을 지적하였다.

가. Brennan-Schwartz 모델

Brennan-Schwartz Consol 모델은 두 변수 l_t, r_t를 가지는 것으로 확률측도 $\mathbb{Q}$에서 다음과 같이 표현되었다.

$$dr_t = \mu_r(r_t, l_t)dt + \sigma_t(r_t, l_t)dW_{r,t} \qquad \text{(수식 79)}$$

$$dl_t = \mu_l(r_t, l_t)dt + \sigma_l(r_t, l_t)dW_{l,t}$$

이 모델에 의한 파생상품의 가격은 다음의 2-변수 편미분방정식을 만족한다.

$$rB = \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \sigma_{l,r}\frac{\partial^2 B}{\partial r \partial l} + \frac{1}{2}\sigma_l^2\frac{\partial^2 B}{\partial l^2} + (\mu_r - \lambda_r\sigma_r)\frac{\partial B}{\partial r} + (\mu_l - \lambda_l\sigma_l)\frac{\partial B}{\partial l} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

여기서 $\sigma_{l,r} = \rho_{l,r}\,\sigma_l\,\sigma_r$ 은 상관계수 $\rho_{l,r}$ 를 가지는 $W_{r,t}$와 $W_{l,t}$의 공분산이다. 그리고 λ_r과 λ_l은 각각 순간금리와 Consol rate의 위험가격이다.

P_∞는 l_t 를 변수로 가지는 함수이므로 Ito's Lemma에 의해서 다음과 같은 식을 만족한다.

$$dB_{\infty,t} = \left(\frac{\partial B_\infty}{\partial t} + \mu_l\frac{\partial B_\infty}{\partial l} + \frac{1}{2}\sigma_l^2\frac{\partial^2 B_\infty}{\partial l^2}\right)dt + \sigma_l\frac{\partial B_\infty}{\partial l}dW_{l,t}$$

$$= \mu_B B_{\infty,t}\,dt + \sigma_B\,B_{\infty,t}\,dW_{l,t}$$

나. Schaefer-Schwartz 모델

이 모델은 two factor 모델이지만 Brennan-Schwartz Consol 모델과 달리 변수로서 순간금리(short rate) r_t 를 가지고 있지 않다. 여기서는 Consol rate l_t 와 순간금리 과 장기금리의 차이 s_t 를 변수로서 사용한다. 이 factor들에 대한 식은 확률측도 $\mathbb{Q}$에서 다음과 같이 표현된다.

$$dl_t = \mu_l\,dt + \sigma_l\sqrt{l_t}\,dW_{l,t} \qquad \text{(수식 80)}$$

$$ds_t = \alpha(\mu - s_t)dt + \sigma_s\,dW_{s,t}$$

여기서 $W_{l,t}$ 와 $W_{s,t}$는 상관관계가 없는 것으로 가정한다.

이 모델에 의한 채권가격은 다음과 같은 편미분방정식(PDE)를 만족시킨다.

$$(l_t + s_t)P = \frac{1}{2}\sigma_s^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 l_t\frac{\partial^2 P}{\partial l^2} + \alpha(\tilde{\mu} - s_t)\frac{\partial P}{\partial s} + (\sigma_l^2 - l_t\,s_t)\frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

여기서 임계값 조건은 $P_T(T) = 1$이다. 그리고 $\tilde{\mu} = \mu - (\lambda_s\sigma_s/\alpha)$는 순간금리와 장기금리의 차이 s_t 의 리스크를 감안한 평균 회귀수준(risk-adjusted mean reversion level)이다.

5. Positive Interest rate 모델

시장에서 관찰되는 금리는 거의 항상 양수로서 관찰된다. 예외적인 상황이

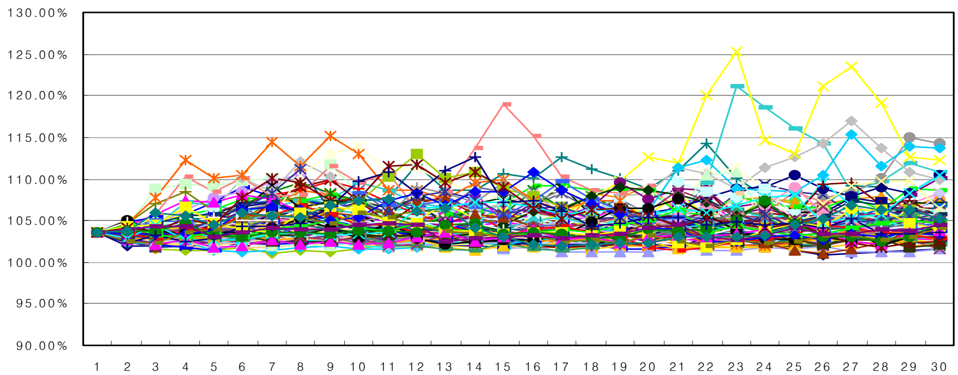
발생하기도 하지만 거의 무시할 수 있는 수준이기 때문에 많은 종류의 금리 모델에서 양의 금리를 생성하게 한다. rational log-normal 모델, Square gaussian 모델, log-r 모델 등이 예가 될 것이다.

Black-Derman-Toy 모델과 Black-Karasinski 모델이 현재 시장에서 널리 사용되어지고 있는데 이유는 양의 금리를 생성해서라기 보다는 lattice 방법론이 쉽기 때문이다. 오히려 다른 positive interest rate 모델의 경우는 널리 사용되어지지 못하고 있다.

가. log-r 모델

log-r 모델에서는 순간금리(short rate) r_t 는 상태변수(state variable) Y_t, $r_t = e^{Y_t}$ 의 지수형태로서 표현된다. 그러므로 순간금리(short rate) r_t 는 항상 양의 값만을 가지게 된다. 대표적인 log-r 모델은 Black, Derman, 그리고 Toy에 의해서 제안된 일명 BDT 모델과 Black 과 Karasinski에 의해서 제안된 일명 BK 모델이다. 특히 이 두 모델은 lattice 사용에 있어서 매우 편리하기 때문에 널리 사용되고 있다. 또한 Dothan 과 Courtadon의 모델들이 초창기에 만들어졌었다.

<그림 Ⅴ-3> Black-Karasinsk 모델



1990년 Black과 Derman, 그리고 Toy 는 금리 tree 이항구조를 만드는 과정

을 제안했는데 이것은 lognormal short-rate 과정과 동일한 것이었다.

$$d(\ln r_t) = [\theta(t) - \frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t} \ln(r_t)]\,dt + \sigma(t)\,dz \qquad \text{(수식 81)}$$

이 과정은 모든 금리가 항상 양수가 되도록 하고 있다. 그리고 이것은 Black-Karasinski 모델의 특수형이고 추세항(drift)에서 $\ln(r_t)$의 계수는 lattice에서 변동성(volatility)의 기간구조(term structure)를 정의하는 과정에서 나온 형태이다.

Black & Karasinski 모델은 상태변수 Y_t $(r_t = e^{Y_t})$가 Hull-White 모델의 미분방정식을 만족하는 것이다.

$$dY_t = (a(t) + b(t)Y_t)dt + \sigma(t)\,dz \qquad \text{(수식 82)}$$

평균회귀성질과 항상 양의 값을 가진다는 장점으로 인해서 최근에 널리 사용되어지고 있는 모델이다. <그림 Ⅴ-3>은 Black-Karasinski 모델의 100가지 시나리오를 그린 것이다. 평균회귀성질에 의해서 그래프들이 <그림 Ⅴ-2>에서 보여준 Ho-Lee 그래프에 비해서 중간으로 모이는 성질을 보여주고 있다. 또한 항상 양수임을 확인할 수 있다.

나. Square Gaussian 모델

이 모델은 Beaglehole, Tenney, Jamshidian, 그리고 Pelsser 등에 의해서 연구되어진 모델로서 순간금리(short rate)을 상태변수(state variable)의 제곱으로 표현한 것이다.

one-factor $Y = Y_1$의 경우

$$r_t = u_t^2 \qquad \text{(수식 83)}$$

$$du_t = (\theta(t) - au_t)dt + \sigma\,dz$$

로 정의하고

$$y_t = u_t - \alpha(t) \qquad \text{(수식 84)}$$

$$\alpha(t) = e^{-at}\sqrt{r_0} + e^{-at}\int_0^t e^{as}\theta(s)\,ds$$

을 가정하면

$$dy_t = -ay_t\,dt + \sigma\,dz \qquad \text{(수식 85)}$$

이 Gaussian 이 된다.
이 모델에서의 채권가격은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_t(T) = \exp(A(t,T) - B(t,T)y_t - C(t,T)y_t^2) \qquad \text{(수식 86)}$$

여기서

$$A(t,T) = \int_t^T \left(\frac{1}{2}\sigma^2 B^2(s,T) - \sigma^2 C(s,T) - \alpha^2(s)\right)ds \qquad \text{(수식 87)}$$

$$B(t,T) = 2\int_t^T \frac{e^{\gamma s}(a+\gamma)e^{2\gamma(T-s)} + (\gamma-a)}{e^{\gamma t}(a+\gamma)e^{2\gamma(T-t)} + (\gamma-a)}\alpha(s)\,ds$$

$$C(t,T) = \frac{e^{2\gamma(T-r)} - 1}{(a+\gamma)e^{2\gamma(T-t)} + (\gamma-a)}$$

$$\gamma^2 = a^2 + 2\sigma^2$$

이다.

6. 기타 모델들

앞에서 언급된 모델들 외에도 여러 가지 형태의 모델들이 있다. Market 모델, Price Kernel 모델, Marsh & Rosenfeld 모델, Demmel 모델, Longstaff/Beaglehole/Tenney 모델 등이 알려져 있다. 특히 Market 모델은 최근에 시장에서 많은 주목을 받고 있는 모델이다. 그리고 시장에서 목격되

어지는 금리의 급격한 변동을 모델에서 구현하기 위한 노력으로 Jump 모델이 연구되어지고 있다.

7. 금리 시나리오 모델 선택 및 비교

금리 시나리오는 학문적인 측면에서의 접근 못지않게 중요한 것은 시장에서의 실용성이다. 이론적으로 아무런 결점이 없다고 할지라도 시장에서 이것이 받아들여지지 못한다면 아무런 소용이 없게 되어버린다. 시장에서 잘 받아들여진다는 것은 시장에서 필요로 하는 목적에 부합된다는 것이다. 그리고 시장에서 요구하는 기본적인 사항을 만족하여야 할 것이다. 시장에서 요구되어지는 기본적인 사항으로서는 첫째, 시장의 자료에 잘 맞아야 하고 둘째, 다양한 시나리오의 생성이 가능해야 하고, 셋째, 다루기가 쉬워야 하는 것이다.

가. 적합성

시장의 자료가 주어졌을 때는 금리 모델은 모델이 모수(parameter)들을 조절하여 시장의 자료에 모델이 맞도록 한다. 따라서 모수는 시장의 자료에 의해서 결정되어지는 것이다. 그러나 실제적으로 시장의 모든 자료에 완벽하게 맞출 수는 없다. 따라서 시장의 자료 중에서 필요로 하는 것들에 맞게끔 모수들을 조절할 것이다. 일반적으로 현재의 수익률 곡선, 채권가격, 변동성 등의 시장자료에 모델들을 맞춘다. HJM 모델, Hull-White 모델 등이 현재의 수익률 곡선에 잘 맞는 것으로 알려져 있다.

나. 다양성

현재의 시장 정보는 단지 하나의 통계적인 정보일 뿐이다. 따라서 모델은 시간의 흐름에 따라 금리가 변해가는 모습도 잘 맞아야 한다. 즉 시장에서 다양하게 전개되어지는 금리의 모습처럼 모델도 이론적으로 다양한 형태의 시나리오 산출이 가능하여야 한다. 그러므로 시장 금리의 평균회귀속도, 변동성 등이 고려되어야 할 것이다.

다. 편리성

금리 모델이 사용되어지기 위해서는 계산 가능한 답을 제시하여야 한다. 시장에서 널리 사용되어지고 있는 모델들은 특정 금융 파생상품들에 관해서 정확한 계산이 가능한 답을 제공하던가 아니면 lattice와 같은 방법론을 통해서 답을 제공하고 있다. 물론 모든 금융파생상품에 대해서 답을 제공하는 모델은 없다. 그러므로 여러 종류의 파생상품에 관해서 얼마나 정확한 계산이 가능한가를 고려하여야 할 것이다. 금리 모델은 일반적으로 기본적인 채권, 옵션, Caplets 등에 관해서 정확한 답을 제시할 수 있고, 그리고 American 옵션 또는 Path-dependent 파생상품과 같은 복잡한 금융파생상품에 관해서 간단하고 근사적인 답을 제시할 수 있기를 시장은 원한다.

실제적으로 여전히 시장에서는 일부 모델이 사용상 더 편리함에도 불구하고 finite difference 방법이나 Monte Carlo 방법을 사용하고 있다.

라. 비교

모든 측면에서 우수한 금리 모델은 존재하지 않는다. Hull-White 모델은 시장의 수익률 곡선에 정확히 맞출 수 있는 장점이 있다. 그리고 이것은 파생상품의 가격 평가 시 lattice를 이용해서 매우 간단하게 계산할 수 있는 장점이 있다. 그러나 두 개 이상의 요소에 의존하는 파생상품의 가격평가 시에는 one-factor 모델이기 때문에 부적절하다. 이렇게 모델은 여러 가지 목적에 따라서 다르게 평가될 수 있다.

<표 Ⅴ-4> 는 적합성, 다양성, 그리고 편리성에 관해서 비교한 것이다. 여기서 다양성은 순간금리와 수익률곡선의 두 가지 측면에서 따로 비교하였으며 편리성은 간단한 금융파생상품(Simple) 예를 들면 채권, Caplet 등을 다룰 때와 복잡한 금융파생상품(Complex) 예를 들면 American 옵션 또는 Path-dependent 파생상품같은 경우를 다룰 때로 나누어서 비교하였다.[14)]

14) Jessica James, Nick Webber, *Interest rate modelling*, West Sussex : John

<표 Ⅴ-4> 금리 모델 비교

모델	Hull-White 모델	Affine 모델	HJM 모델
적합성	Exact	Good	Exact
다양성			
순간금리	Good	OK	-
수익률곡선	No	Good	Excellent
편리성			
Simple	Good	OK	-
Complex	OK	OK	-

시장의 경험 자료를 바탕으로 했을 때는 다른 형태의 비교가 가능할 것이다. 그러므로 모델의 선택에 있어서 사용 목적에 맞게 그리고 시장의 경험을 고려해서 모델이 선택되어져야 할 것이다.

8. Calibration

가. 개념

Ho-Lee, Vasicek, 그리고 CIR 등 금리 시나리오 모델을 살펴보면 결정되어야할 모수(parameter)들이 있다. 이 값들이 어떻게 결정되는지에 따라 금리 시나리오에 의해서 생성되는 시나리오들의 모습은 많은 차이를 보이게 된다. 예를 들어 Vasicek 모델을 살펴보자

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dW$$

여기서 평균회귀속도를 나타내는 a와 그리고 장기적으로 수렴해 갈 평균금리인 b 그리고 변동성의 크기를 나타내는 σ를 결정하여야 한다. 평균회귀속도가 지나치게 크다던가 아니면 지나치게 작다면 그에 따른 금리 시나리오는 전혀 다른 형태로 나타날 것이다. 그러므로 적절한 모수들을 선택함으로써 금리 시나리오에서 만들어지는 금리 시나리오는 현실적이어야 할 것이다.

적절한 모수들을 선택하는 방법으로써 시장에서의 과거의 경험데이터를 사

Wiley & Sons, 2000, pp.73～75.

용하는 것이 가장 바람직할 것이다. 그러나 한 가지 고려해야할 사항은 우리가 사용하는 금리 모델은 마팅게일 측도 $\mathbb{Q}$하에서 다루어지고 있다는 것이다. 그러나 실제 시장에서 구해지는 데이터들은 마팅게일 측도하에서 만들어진 것이 아니라 관측측도 $\mathbb{P}$하에서 만들어 진 것이다. 따라서 관측측도 $\mathbb{P}$하에서 모델링을 한 것이 아닌 한 바로 시장의 데이터를 사용할 수가 없다. 따라서 마팅게일 모델링을 한 경우에는 모수를 찾을 때 시장의 데이터를 이용하는 통계적 추론 방법을 사용할 수밖에 없다.

마팅게일 측도 $\mathbb{Q}$도 역시 모델에서 자체적으로 만들어지는 것이 아니라 시장의 정보에 의해 주어지는 것이다. 따라서 $\mathbb{Q}$를 결정하기 위해서 시장으로부터 가격에 대한 정보를 가져와야 한다. 그래서 이 정보(예 : 수익률 곡선)에 모델을 맞추는 일을 해야 한다. 이렇게 시장정보로부터 모델을 맞추어 가면서 모수를 결정하는 것을 Calibration 이라고 한다.

나. 모수(Parameter) 결정

시장의 가격정보로 부터 모수(parameter)를 결정하는 과정은 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 금리 시나리오 모델을 결정한다.

사용하고자 하는 금리 시나리오 모델을 결정을 함으로써 그 모델에 있는 모수(parameter)가 무엇인지를 파악한다. Vasicek 모델인 경우 모수는 a, b, σ 세 개가 될 것이다.

2) 채권의 이론 가격을 결정한다

채권의 가격 $P(t,T)$가 다음과 같은 편미분방정식을 만족한다는 것을 앞 절에서 언급했었다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

$$P(T,T) = 1$$

이 식들을 풀어서 채권의 이론 가격을 구할 수 있다.

3) 채권의 시장 가격을 시장으로부터 구한다

오늘을 기준으로 하여 모든 만기 T에 대한 채권가격 $P(t, T)$를 시장으로부터 구한다. 그러나 현실적으로 모든 만기의 채권이 시장에서 거래되지 않기 때문에 모두 구할 수 없다. 따라서 구할 수 있는 시장가격을 통하여 나머지 부분은 적절한 연결을 통하여 구하여야 할 것이다.

4) 모수(parameter)를 결정한다.

위에서 구한 시장가격에 이론가격이 맞추어지도록 모수를 결정한다.

5) 위에서 새롭게 결정된 모수들을 모델에 대입함으로서 모델이 완성된다.

다. 문제점

Vasicek 모델의 경우를 생각해보면 위에서 언급되었듯이 결정되어야 할 모수는 3개 즉 a, b, σ 이다. 그러나 이 모수를 결정하기 위해서 우리는 채권의 시장가격과 이론가격을 비교해야 한다. 그러나 채권의 가격은 만기 T 별로 존재하므로 3개보다 많다. 따라서 모든 만기 T에 대해서 채권의 시장가격에 이론가격을 맞출 수 없다. 이와 같은 문제점은 Vasicek 모델이외에도 CIR 모델도 마찬가지로 가지고 있다

이와 같은 문제점이 발생하는 이유는 모델의 모수 갯수에 비해 채권 시장에서 유통되는 만기가 더 많기 때문에 발생한다. 따라서 모수가 무한히 많은 모델을 생각한다면 그런 문제점을 해결할 수 있을 것이다. 모수를 무한히 만드는 방법은 시간에 관한 함수로서 모수를 표현하는 것으로 해결될 수 있다. 이에 해당되는 모델의 예로서 Ho-Lee모델, Hull-White 모델 등이 있다.

Calibration을 하는 시점에는 그 날의 수익률곡선(Yield Curve)이 채권의 시장가격에 잘 맞겠지만 그러나 금리는 금리의 특성에 의해서 매일 랜덤하게 변하기 때문에 매일 Calibration을 해주지 않으면 더 이상 맞지 않게 된다. 따라서 이러한 부분을 고려해서 금리 시나리오 모델을 선택하여야 할 것이다.

Ⅵ. 가치평가

금리 시나리오 모델의 목적중의 하나는 파생상품의 가치를 평가하는 것이다. 여기서는 금리 시나리오 모델로부터 실제 가격을 산출해내는 방법들에 관해서 알아보겠다.

널리 사용되어지고 있는 주요 방법으로는 finite difference 방법, Monte Carlo 방법, 그리고 lattice 방법이 있다. 어느 방법을 사용할 것인가는 모델과 그리고 적용에 달려있다. Monte Carlo 방법은 준비하는 것은 쉬우나 실행하는데 많은 시간을 소요한다. 표준화된 금리 모델에 대해서 우수한 lattice 방법론이 알려져 있지만 다른 금리모델로 전환하는 것은 쉬운 일이 아니다. finite difference 방법론은 실행하는데 어려움이 있어서 널리 사용되어지지 못하고 있다.

1. Finite Difference 방법

Finite difference 방법은 금리 모델링 및 파생상품 모델링에서 오랜 역사를 가지고 있다. Brennan-Schwartz, Courtadon, 그리고 Vasicek 등은 초기 논문에서 finite difference 방법을 사용하였다.

Finite difference 방법은 3가지 방법론 즉 Explicit, Implicit, 그리고 Crank-Nicolson 방법론이 널리 알려져 있다.

가. 채권가격 계산법

Feynman-Kac 정리에 의해서 채권가격 c 는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \tilde{\mu}\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = rc \qquad \text{(수식 88)}$$

일반적으로 편미분방정식은 정확한 값을 계산할 수 없는 경우가 대부분이다. 그러나 어떤 경우에 따라서는 편미분방정식의 정확한 값을 계산할 수 있다. 가령 예를 들어 Extended Vasicek 모델의 경우 채권가격 $P_t(T)$는 다음과

같은 미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\theta(t) - ar_t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = r_t P \ , \quad P_T(T) = 1 \qquad \text{(수식 89)}$$

이 경우 채권가격의 정확한 값은 $P_t(T) = e^{A(t,\ T) - B(t,\ T)}$ 이다. 여기서 A와 B는 다음의 식을 만족한다.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = aB - 1, \quad B(T,\ T) = 0 \qquad \text{(수식 90)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \theta(t)B - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2, \quad A(T,\ T) = 0$$

B에 관한 미분방정식의 해는 $B(t,\ T) = (1 - e^{-a(T-t)})/a$ 이다. 일반적으로 $\theta(t)$는 시장에서 관찰되어지는 정보에 $P_t(T)$ 값을 맞추도록 선택되어진다. 그리고 $\theta(t)$가 함수의 형태로서 결정되어지면 A에 관한 미분방정식을 해결할 수 있으므로 $P_t(T)$의 값을 명확히 산출할 수 있게 된다.

다른 모델들에서도 명확한 값을 산출할 수 있는 경우가 있지만 그러나 일반적으로 편미분방정식의 명확한 해를 구하는 것은 어렵다. 따라서 다른 방법이 요구되어진다.

나. 수치해석학적 접근법

위에서 언급한 것처럼 많은 경우 편미분방정식은 해결되지 않기 때문에 다른 방법을 강구하게 되는데 그 중 한 가지 방법으로서 수치해석학적인 접근을 통해서 해결을 할 수 있다. 금리와 시간을 유한한 간격으로 다음과 같이 나눈다.

$$r_0, \cdots, r_{M+1} \ , \quad t_0, \cdots, t_{N+1} = T$$

그러면 시간 t 와 금리 r 을 양 축으로 하여 다음과 같이 격자점과 그리고 격자점간 간격 $\triangle_t$, $\triangle_r$ 을 만들 수 있다.

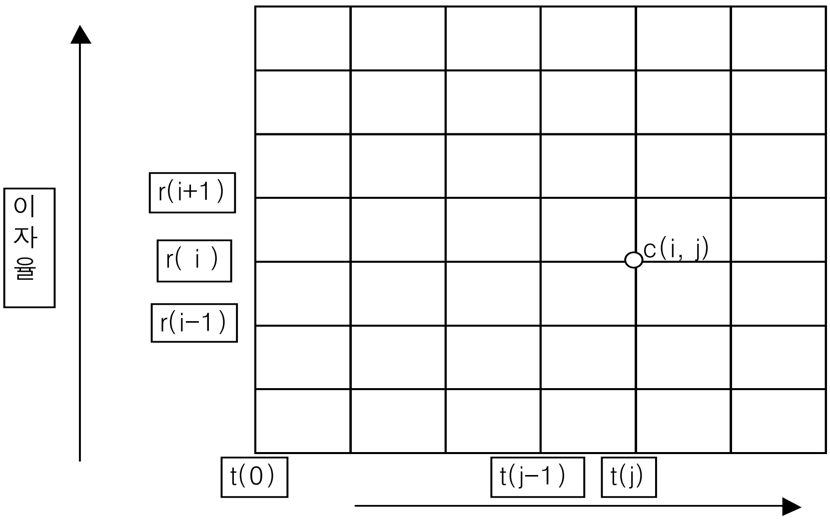
$$(r_i,\ t_j),\quad i = 0, \cdots, M+1,\quad j = 0, \cdots, N+1$$

$$\triangle_t = t_{j+1} - t_j,\ \ j = 0, \cdots, N,$$

$$\triangle_r = r_{i+1} - r_i,\ \ i = 0, \cdots, M$$

여기서 격자점간 간격 $\triangle_t$ 와 $\triangle_r$ 은 일정할 필요는 없다. 각 격자점 $(r_i,\ t_j)$에서의 채권가격을 $c_{i,j} = c(r_i, t_j)$ 로 표시하면 우리는 채권가격으로 이루어진 격자점 좌표를 <그림 Ⅵ-1>과 같이 가지게 된다.

<그림 Ⅵ - 1> 금리와 시간의 격자점



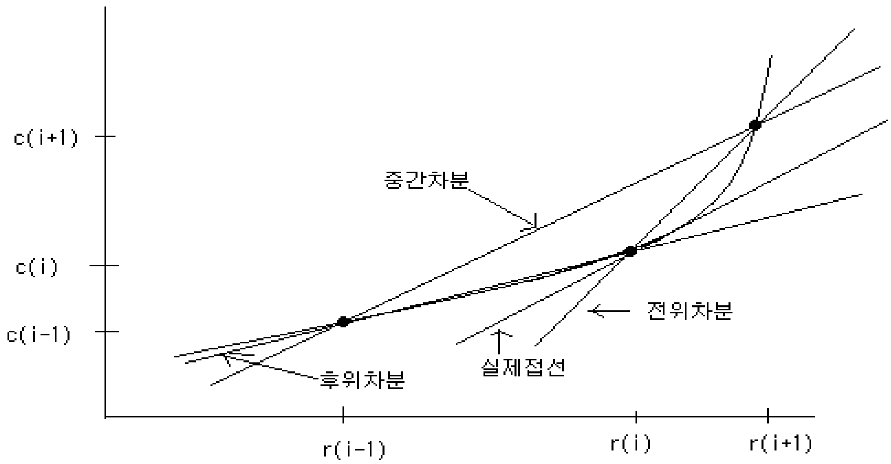
이제 우리는 (수식 88)에 나타나는 편미분방정식을 격자점을 이용해서 이산적인 근사값을 구할 수 있다. 즉 인접한 격자점들은 연관되어 있다는 사실을 이용해서 미분에 적절한 근사값을 찾는 방법인 차분방정식을 사용할 수 있다. 차분방정식을 사용하는 방법에는 3가지 종류가 널리 사용되어지고 있는데 어떤 격자점 $(r_i,\ t_j)$에서의 미분을 인접하는 어떤 점을 사용하여 근사하는지에 따라 구분되어진다.

1) 전위차분(forward difference)

$$(\frac{\partial c}{\partial r})_{i,j} \approx \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{r_{j+1} - r_j} \qquad \text{(수식 91)}$$

<그림 Ⅵ-2>에서와 같이 전위차분이라는 것은 주어진 격자점과 그리고 이웃하는 바로 다음 단계의 격자점을 연결한 직선의 기울기를 말한다.

<그림 Ⅵ - 2> 일차미분(접선)의 3가지 근사값



2) 후위차분(backward difference)

$$(\frac{\partial c}{\partial r})_{i,j} \approx \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{r_j - r_{j-1}} \qquad \text{(수식 92)}$$

<그림 Ⅵ-2>에서와 같이 후위차분이라는 것은 주어진 격자점과 그리고 이웃하는 바로 전 단계의 격자점을 연결한 직선의 기울기를 말한다.

3) 중간차분(central difference)

$$(\frac{\partial c}{\partial r})_{i,j} \approx \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j-1}}{r_{j+1} - r_{j-1}} \qquad \text{(수식 93)}$$

<그림 Ⅵ-2>에서와 같이 중간차분이라는 것은 주어진 격자점과 이웃하는 바로 전단계의 격자점과 다음 단계의 격자점을 연결한 직선의 기울기를 말한다. 그림에서 알 수 있듯이 다른 두 방법에 비해서 가장 나은 방법[15]이고 따라서 가장 선호되는 방법이다.

다. Explicit 방법론

Explicit 방법론에서는 금리의 일차, 이차미분에 관해서는 중간차분 방법을 사용하고 시간에 관한 미분에 관해서는 후위차분 방법을 사용한다.

격자점들의 간격이 일정하다고 가정을 한다면 다음과 같은 근사식들을 얻을 수 있다.

$$(\frac{\partial c}{\partial r})_{i,j} \approx \frac{c_{i+1,j} - c_{i-1,j}}{2\triangle_r}$$

$$(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2})_{i,j} = \frac{\partial(\frac{\partial c}{\partial r})}{\partial r} \approx \frac{1}{\triangle_r}(\frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{\triangle_r} - \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{\triangle_r}) = \frac{c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}}{(\triangle_r)^2}$$

$$(\frac{\partial c}{\partial t})_{i,j} \approx \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\triangle_t}$$

이 근사값들을 (수식 88)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\triangle_t} + \tilde{\mu}_{i,j}\frac{c_{i+1,j} - c_{i-1,j}}{2\triangle_r} + \frac{1}{2}\sigma^2_{i,j}\frac{c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}}{(\triangle_r)^2} = r_i c_{i,j} \qquad \text{(수식 94)}$$

(수식 94) 을 $c_{i,j}$ 기준으로 정리를 하면 다음과 같이 된다.

$$A_{i,j}c_{i+1,j} + B_{i,j}c_{i,j} + C_{i,j}c_{i-1,j} = c_{i,j-1} \qquad \text{(수식 95)}$$

여기서

$$A_{i,j} = \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{i,j}\frac{\triangle_t}{\triangle_r} + \frac{1}{2}\sigma^2_{i,j}\frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2}$$

15) 항상 그런 것은 아님. 그래프의 모양에 따라서 달라질 수 있음.

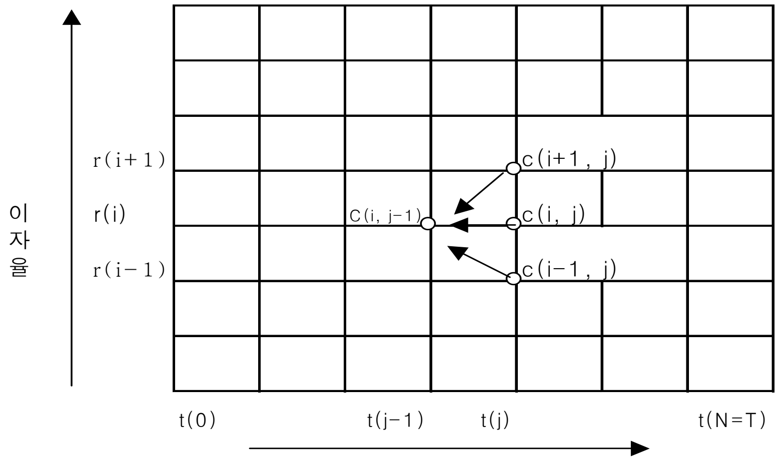
$$B_{i,j} = 1 - \sigma_{i,j}^2 \frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2} - r_i \triangle_t$$

$$C_{i,j} = -\frac{1}{2}\tilde{\mu}_{i,j}\frac{\triangle_t}{\triangle_r} + \frac{1}{2}\sigma_{i,j}^2 \frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2}$$

이다.

(수식 95)에 의하면 t_{j-1} 에서 $c_{i,j-1}$의 값은 t_j에서의 세 점 $c_{i+1,j}$, $c_{i,j}$, $c_{i-1,j}$ 의 값에 의해서 결정되어짐을 보여주고 있다. 따라서 t_{N+1} 시점에서의 값은 알려져 있기 때문에 (수식 95)를 사용하여 <그림 Ⅵ-3>에서 보여주는 것과 같이 t_{N+1} 으로부터 t_0 로 거슬러 올라가면서 격자점들의 값을 계산할 수 있다.

<그림 Ⅵ - 3> Explicit method에서 격자점을 통한 계산방향



격자점의 맨 위 와 맨 아래쪽은 임계점 문제에 해당되기 때문에 다른 방법을 통해서 해결되어야 할 것이다.

라. Implicit 방법론

Explicit 방법론에서는 t_j 에서의 값들을 이용하여 t_{j-1}에서의 값을 명확하게(explicitly) 계산했었다. 그러나 Implicit 방법론에서는 t_j 에서의 값들을 이

용하여 t_{j-1}에서의 값을 음함수(Implicit)의 형태로서 표시할 수 있다.

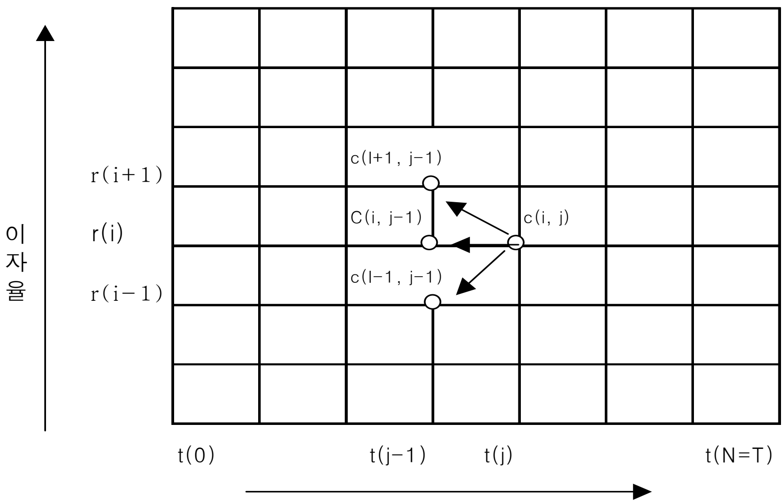
여기서는 다음과 같은 근사식들을 우선 구할 수 있다.

$$(\frac{\partial c}{\partial r})_{i,j} \approx \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i-1,j-1}}{2\triangle_r}$$

$$(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2})_{i,j} \approx \frac{c_{i+1,j-1} - 2c_{i,j-1} + c_{i-1,j-1}}{(\triangle_r)^2}$$

$$(\frac{\partial c}{\partial t})_{i,j} \approx \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\triangle_t}$$

<그림 Ⅵ - 4> Implicit method에서 격자점을 통한 계산방향



다시 이 근사식들을 편미분방정식(수식 88)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\triangle_t} + \widetilde{\mu_{i,j}} \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i-1,j-1}}{2\triangle_r} + \frac{1}{2}\sigma_{i,j}^2 \frac{c_{i+1,j-1} - 2c_{i,j-1} + c_{i-1,j-1}}{(\triangle_r)^2} = r_i c_{i,j}$$

이 식을 Explicit 의 경우와 마찬가지로 $c_{i,j}$ 기준으로 정리를 하면 다음과 같이 된다.

$$A_{i,j} c_{i+1,j-1} + B_{i,j} c_{i,j-1} + C_{i,j} c_{i-1,j-1} = c_{i,j} \qquad \text{(수식 96)}$$

단, $i = 1, \cdots, M$ 이다.   여기서

$$A_{i,j} = \frac{1}{1 - r_i \triangle_t} \left(-\frac{1}{2} \tilde{\mu}_{i,j} \frac{\triangle_t}{\triangle_r} - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 \frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2} \right)$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{1 - r_i \triangle_t} \left(1 + \sigma_{i,j}^2 \frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2} \right)$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{1 - r_i \triangle_t} \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_{i,j} \frac{\triangle_t}{\triangle_r} - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 \frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2} \right)$$

이다.

(수식 96)에서 알 수 있듯이 시간 t_j에서의 값 $c_{i,j}$는 시간 t_{j-1}에서의 3개의 값 $c_{i+1,j-1}$, $c_{i,j-1}$, $c_{i-1,j-1}$ 에 연관되어 있음을 알 수 있다. Explicit 방법론과 마찬가지로 시간 t_{N+1} 으로부터 t_0 으로 거슬러 올라가면서 <그림 Ⅵ - 4>에서 보여주는 것과 같이 격자점들의 값들을 계산한다. 그러나 Explicit 방법론의 경우와 달리 $c_{i+1,j-1}$, $c_{i,j-1}$, $c_{i-1,j-1}$의 음함수의 형태로 표현되어지기 때문에 M 개의 선형방정식들을 해결을 함으로서 전단계의 값을 계산할 수 있다.

마. Crank-Nicolson 방법론

Crank-Nicolson 방법론은 Explicit 방법론과 Implicit 방법론의 평균값으로서 생각할 수 있다. 따라서 양 방법의 장점을 취할 수 있는 잇점도 있지만 한편으로는 사용에 한계가 있다.

여기서는 다음과 같은 근사식들을 우선 구할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{i,j} \approx (1-a) \frac{c_{i+1,j} - c_{i-1,j}}{2\triangle_r} + a \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i-1,j-1}}{2\triangle_r}$$

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}\right)_{i,j} \approx (1-a) \frac{c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}}{(\triangle_r)^2} + a \frac{c_{i+1,j-1} - 2c_{i,j-1} + c_{i-1,j-1}}{(\triangle_r)^2}$$

$$(\frac{\partial c}{\partial t})_{i,j} \approx \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\triangle_t}$$

여기서 $a = 0$ 이면 이것은 Explicit 의 근사식이 되고 반대로 $a = 1$ 이면 이것은 Implicit 의 근사식이 된다. Crank-Nicolson 방법론은 $a = \frac{1}{2}$ 이고 따라서 두 방법론의 평균값을 취하는 것이다. $\alpha = \frac{\triangle_t}{(\triangle_r)^2}$ 와 $v(r,t) = \frac{1}{2}\sigma^2(r,t)$ 를 가정하고 다음 변수들을 정의하면

$$m_{r,j} = -2\alpha v_{i,j}$$
$$\mu_{i,j} = \alpha v_{i,j}(v_{i,j} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{i,j}\triangle_r)$$
$$l_{i,j} = \alpha v_{i,j}(v_{i,j} - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{i,j}\triangle_r)$$

위에서 만들어진 근사식을 편미분방정식 (수식 91)에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$-(1-a)\mu_{i,j}c_{i+1,j} - (1 - r_i\triangle_t + (1-a)m_{i,j})c_{r,j} - (1-a)l_{i,j}c_{i-1,j}$$
$$= a\mu_{i,j}c_{i+1,j-1} - (1 - am_{i,j})c_{i,j-1} + al_{i,j}c_{i-1,j-1}$$

여기서 $i = 1, \cdots, M$ 이다.

바. 방법론 비교

어떤 방법을 선택할 것인가는 전적으로 실행 가능성에 달려있다. 그러나 간단히 각각의 방법론에 대해서 비교해보면

- Explicit 방법론

 - $\alpha = \triangle_t/(\triangle_t)^2 \le \frac{1}{2}$이면 안정적이고 값들이 수렴한다. 그러나 $\alpha > \frac{1}{2}$ 일 경우에는 오차가 무제한적으로 커질 수 있다.

 - 실행이 간단하다

- Implicit 방법론
  - 항상 안정적이며 수렴한다.
  - Explicit 방법론에 비해서 실행이 어렵다
- Crank-Nicolson 방법론
  - Implicit 방법론 수준으로 안정적이다
  - 다른 두 방법론에 비해서 실행이 어렵다

비록 실행하기에는 가장 어려운 방법론이지만 그러나 안정성으로 인해서 실제적으로 Crank-Nicolson 방법론이 많이 선호된다.

2. Monte Carlo 방법

가. 개념 및 방법론

이 절에서는 random number를 이용해서 채권가격의 simulation을 살펴보겠다. 여기서는 순간금리(interest rate) r_t를 one factor로 생각하는 one-factor 모델만을 고려한다. 그러면 one-factor인 순간금리로부터 현물금리(spot rate) $r(t)$를 구할 수 있고 이것을 이용해서 채권의 가격을 구할 수 있다. 따라서 순간금리 또는 현물금리를 나타내는 하나의 경로(path)를 생성하면 각 만기 T에서의 채권 가격과 수익률곡선(yield curve)을 구할 수 있다.

금리 모델은 일반적으로 다음과 같은 확률미분방정식을 만족한다.

$$dr(t) = \mu(t, r(t))\, dt + \sigma(t, r(t))\, dW(t) \qquad \text{(수식 97)}$$

여기서 $W(t)$는 브라운운동을 나타낸다. 이것을 이산적인 개념으로 바꿔보면 아주 작은 시간 $\triangle t$에 대해 (수식 97)을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$r(t+\triangle t) - r(t) = \mu(t, r(t))\, \triangle t + \sigma(t, r(t))\,(W(t+\triangle t) - W(t)) \qquad \text{(수식 98)}$$

여기서 $W(t+\triangle t) - W(t)$는 각각의 t 에 대해서 독립이며, 평균은 0, 분

산은 $\triangle t$인 정규분포를 따른다. 그러므로 표준정규분포를 따르는 확률변수 ϵ_t에 대해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$r(t+\triangle t)-r(t)=\mu(t,r(t))\,\triangle t+\sigma(t,r(t))\,\sqrt{\triangle t\,\epsilon_t} \qquad \text{(수식 99)}$$

시간 t를 계속 늘려가면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
r(\triangle t) &= r(0)+\mu(0,r(0))\,\triangle t+\sigma(0,r(0))\,\sqrt{\triangle t\,\epsilon_0} \qquad \text{(수식 100)}\\
r(2\triangle t) &= r(\triangle t)+\mu(\triangle t,r(\triangle t))\,\triangle t+\sigma(\triangle t,r(\triangle t))\,\sqrt{\triangle t\,\epsilon_1}\\
&\vdots\\
r(n\triangle t) &= r((n-1)\triangle t)+\mu((n-1)\triangle t,r((n-1)\triangle t))\,\triangle t\\
&\quad +\sigma((n-1)\triangle t,r((n-1)\triangle t))\,\sqrt{\triangle t\,\epsilon_{n-1}}
\end{aligned}$$

이제 위 식들에 나타나는 확률변수 ϵ_t에 값을 반영하기 위해서 현재 시점 0부터 t 까지를 n 등분하여 한 구간을 $\triangle t$ 라 하면 $t=n\triangle t$가 될 것이다. 이제 n개의 서로 독립적이고 표준 정규분포를 따르는 random number 변수 $\epsilon_0, \cdots, \epsilon_{n-1}$를 생성한다. 이렇게 생성된 random number 변수들을 (수식 100)에 순서대로 대입하여 $r(\triangle t)$부터 구해나가면 $r(t)=r(n\triangle t)$의 값을 구할 수 있다. 그리고 이것을 이용하면 한 경우의 채권의 가격과 수익률 곡선을 구할 수 있다.

이 과정을 반복하여 평균값을 구하는 것이 Monte Carlo Simulation 방법론이다.

나. Monte Carlo 방법론 장단점

Monte Carlo 방법론의 장점은 이 방법에 의하면 금리 경로에 독립적인 상품과 마찬가지로 경로에 의존하는 파생상품에도 적용이 가능하다는 것이다. 그러나 단점은 계산하는데 많은 시간과 노력이 필요하다는 것이다. 최근의 컴퓨터의 발전으로 많은 시간이 절약이 되었지만 그러나 수백 수천가지의 시

나리오를 실행하는 것은 시간과 노력이 여전히 요구되어지는 부분이다. 한편으로는 계산 속도를 올리는 방법론이 개발되고 그리고 시나리오의 갯수를 줄이는 방법론 등이 개발되고 있다. 또 다른 큰 단점은 똑같은 답을 절대 주지 않는다는 것이다. 즉 실행할 때 마다 다른 결과 값이 나온다는 것이다. 랜덤변수에 의존하기 때문에 결과 값은 실행 시 마다 달라질 수밖에 없다. 그러나 이 문제점은 그런 차이로 해서 생기는 오차의 허용범위를 정해줌으로서 해결될 수 있다. 다른 한편으로는 “Antithetic Variate Method"를 사용함으로서 오차의 범위를 줄일 수도 있다.

3. Lattice 방법

Lattice 방법론은 1970년대에 log-normal process를 위해서 Cox, Ross, 그리고 Rubinstein에 의해서 처음 소개되었다. 그리고 그 이후 binomial 방법론이 사용되어 왔다. 그러나 금리는 평균회귀성질을 가지고 있기 때문에 금리의 변화를 다양하게 표현하는데 한계가 있다. 금리에 관한 효율적인 Lattice 방법론은 Ho 와 Lee 에 의해서 1986년에 소개되었고 이어서 Hull 과 White, Black, Derman, 그리고 Toy 등이 그들의 모델에서 소개를 하였다.

Monte Carlo 방법의 최근의 발전에도 불구하고 American 파생상품의 가치평가 시 사용상의 부적절성 때문에 Lattice 방법론은 중요한 하나의 방법론으로서 간주되고 있다.

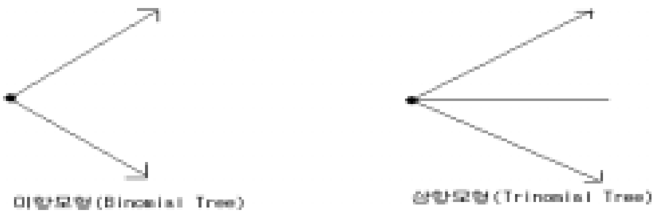
여기서는 Genralized Hull-White 금리 모델을 기준으로 Lattice Methods를 설명하겠다.

가. 이자율 트리(Interest rate tree)

금리 tree라는 것은 순간금리(short rate)에 대한 stochastic 확률전개 과정을 이산형 시간구조로서 표현한 것이다. 단위시간간격이 $\triangle t$ 라고 한다면 순간금리는 $\triangle t$ 시간당 한번 씩 변하면서 전개되어 나가는 것이다.

일반적으로 위에서 언급하였듯이 평균회귀성과 같은 금리의 특징을 금리의 이항 모델(binomial tree)보다는 삼항 모델(trinomial tree)이 더 잘 표현하기 때문에 삼항모델이 더 널리 사용되고 있다.

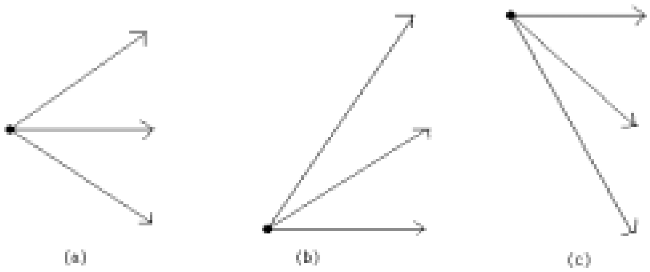
<그림 Ⅵ-5> 이항 및 삼항 모델



<그림 Ⅵ-5>에서 보는 것과 같이 각각의 선에 일정한 확률이 존재하여 다음 단계로 단위시간 간격으로 진행되어 가는 것이다.

실제적으로 금리가 지나치게 높다던가 아니면 지나치게 낮다면 삼항모델의 경우 올라가는 선 또는 내려가는 선의 확률은 현실적으로 거의 0에 가까울 것이다. 따라서 이런 경우를 고려해서 일정한 한계선을 정한 후 그 선에 접근하였을 경우에는 변형된 모습의 tree를 그려준다. 따라서 삼항모델(Trinomial Tree)은 그림 <그림 Ⅵ-6>과 같이 3가지 형태로서 표현되어진다.

<그림 Ⅵ-6> 삼항모델의 3가지 형태



금리가 지나치게 낮을 경우 즉 <그림 Ⅵ-6>의 (b)의 경우에는 더 이상 내려가는 가능성은 없고 올라가는 가능성만이 두 가지 방법으로 존재한다. 금리가 지나치게 높은 경우도 마찬가지이다. 이렇게 함으로써 금리의 평균회귀성을 구현할 수 있다.

나. Tree 만들기

1) 기초 작업

위에서 언급한 바와 같이 Generalized Hull-White 모델을 기준으로 설명하겠다[16]. 순간금리(short rate) r_t 에 대한 어떤 함수는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$df(r) = [\theta(t) - a(t)f(r)]\,dt + \sigma(t)\,dz \qquad \text{(수식 101)}$$

함수 $\theta(t)$는 초기 수익률곡선(initial term structure)에 잘 맞도록 선택되어진다. 함수 $a(t)$와 $\sigma(t)$는 실제 시장에서 거래되는 금리 파생상품의 시장 가격에 잘 맞추도록 선택되어지는 변동성 모수들이다.

Generalizd Hull-White 모델에서 $f(r) = r$, $a(t) = 0$ 그리고 σ가 상수이면 이것은 Ho-Lee 모델이 된다. $f(r) = r$ 이고 $a(t) \neq 0$ 이면 이것은 최초의 Hull-White 모델이 된다. 그리고 $f(r) = \ln r$ 이면 이것은 Black-Karasinski 모델이 된다.

2) 1 단계 작업

함수 g를 다음을 만족하는 함수로서 정의한다.

$$dg = [\theta(t) - a(t)g(t)]\,dt$$

16) John Hull and Alan White, “The General Hull-White Model and Super Calibration″, August 2000.

그러면 다음과 같이 새로운 함수 x를 정의할 수 있다.

$$x(r,t) = f(r) - g(t)$$

이 새로운 함수는 함수 f와 g에 의해서 다음 미분방정식을 만족한다.

$$dx = -a(t)x\,dt + \sigma(t)\,dz$$

여기서 함수 x의 초기값이 0 이 되도록 g의 초기값을 정한다. 그러면 이 함수 x는 0으로 평균회귀하는 성질을 가지고 그리고 0에서 출발하였을 때 미래시점에서의 무조건하에서의 기대값은 항상 0이 된다.

3) 2 단계 작업

시간을 n등분 $t_0,\ t_1,\ \cdots,t_n$ $(t_0 = 0, t_n = T,\ t_i > t_{i-1})$하여서 n 단계의 tree를 만든다고 가정하자. 여기서 T 는 마지막 단계의 시간으로서 이 이후 더 이상의 현금발생이나 지급이 발생하지 않도록 선택되어야 한다. 각 시점 t_i에서 격자점(node)들은 아래위로 $\pm j\triangle x_i$ 만큼 금리가 움직인 것이다. 따라서 t_i 시점에서 어느 격자점 (i,j)을 가정하면 여기서 $j := j\triangle x_i$이다. 여기서 $\triangle x_i$는 각 시점에서 x의 변동성을 충분히 반영하는 값으로서 주어져야 하며 일반적으로 이 값은 다음으로 정의한다.

$$\triangle x_i = \sigma(t_{i-1})\sqrt{3(t_i - t_{i-1})}$$

그러면 다음 단계 t_{i+1}를 고려해보면 $(k-1)\triangle x_{i+1}$, $k\triangle x_{i+1}$, $(k+1)\triangle x_{i+1}$ 의 한 값으로 간다. 여기서 x에 대한 식으로부터 다음 단위기간동안의 x에 대한 평균변화량 $E(dx) = M$ 과 변화량의 분산 $V = E(dx^2) - E(dx)^2$을 계산할 수 있다. $(j-1)\triangle x_{i+1}$, $(j)\triangle x_{i+1}$, $(j+1)\triangle x_{i+1}$ 의 값들로 갈 확률을 p_d , p_m , p_u라고 각각 정의하자. 그러면 다음단계에서의 평균값을 이용하면

$$j \triangle x_i + M = p_u(k+1)\triangle x_{i+1} + p_m k \triangle x_{i+1} + p_d(k-1)\triangle x_{i+1}$$
$$= (p_u + p_m + p_d) k \triangle x_{i+1} + (p_u - p_d)\triangle x_{i+1}$$
$$= k \triangle x_{i+1} + (p_u - p_d)\triangle x_{i+1}$$

을 얻을 수 있고 그리고 분산 값을 이용하면

$$V + (j\triangle x_i + M)^2 = p_u(k+1)^2 \triangle x_{i+1}^2 + p_m k^2 \triangle x_{i+1}^2 + p_d(k-1)^2 \triangle x_{i+1}^2$$
$$= (p_u + p_m + p_d) k^2 \triangle x_{i+1}^2 + 2k(p_u - p_d)\triangle x_{i+1}^2 + (p_u + p_d)\triangle x_{i+1}^2$$
$$= k^2 \triangle x_{i+1}^2 + 2k(p_u - p_d)\triangle x_{i+1}^2 + (p_u + p_d)\triangle x_{i+1}^2$$

을 얻을 수 있다.

위의 두 식들을 풀면 확률 p_d , p_m , p_u의 값을 구할 수 있다.

$$p_u = \frac{V}{2\triangle x_{i+1}^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$$

$$p_d = \frac{V}{2\triangle x_{i+1}^2} + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2}$$

$$p_m = 1 - \frac{V}{\triangle x_{i+1}^2} - \alpha^2$$

여기서

$$\alpha = \frac{j\triangle x_i + M - k\triangle x_{i+1}}{\triangle x_{i+1}}$$

이다.

<그림 Ⅵ-6>의 (b)와 (c)의 경우에는 확률 p_d , p_m , p_u의 값은 다르게 나온다.17)

이제까지 각각의 격자점과 그리고 그곳에서 나아가는 가지들의 확률에 관해서 알아보았다. 이제 각 격자점(node)에서 원래 함수 f에 대한 값을 구하기 위해서 함수 x에 함수 $g(t)$의 값을 더한다. 함수 $g(t)$는 $\theta(t)$의 함수이고 그리고 $\theta(t)$는 모델이 수익률곡선에 맞추어지도록 선택되어진다. 따라서 모든

---

17) John C. Hull, *Options, Futures, & Other Derivatives* , Upper Saddle River : Prentice-Hall, pp.580～591.

만기의 할인채의 가격을 정확히 계산할 수 있도록 각 격자점을 조정하는 것이다.

격자점 (i, j)는 시간 t_i 에서 $x = j\triangle x_i\,(0 \le i \le n, -m_i \le j \le m_i)$ 인 점을 말한다. 그러면 다음 사항들을 정의한다.

$g_i := g(t_i)$

x_{ij} := 격자점 (i, j)에서의 x의 값

f_{ij} := 격자점 (i, j)에서의 $f(r)$의 값. 즉 $x_{i,j} + g_i$ 이다.

r_{ij} := 격자점 (i, j)에서의 금리, 즉 $f^{-1}(x_{i,j} + g_i)$ 이다.

$Q(i, j|h, k)$:= 격자점 (i, j)에서 1을 지불하고 그 외 다른 모든 점에서는 0을 지불하는 파생상품의 격자점 (h, k)에서의 가격

$p(i, j|h, k)$:= 격자점 (h, k)에서 격자점 (i, j)로 갈 확률

$Q_{i,j} := Q(i, j|0, 0)$

$Q(i, j|h, k)$는 Arrow-Debreu(AD) 가격으로 알려져 있다. 그리고 $Q_{i,j}$ 는 격자점 (i, j)에 대한 root AD 가격이라고 부른다. 격자점(i, j)에서 root AD 가격은 일단 시간 t_{i-1}에서의 모든 격자점에 대한 root AD의 가격이 결정이 되어야 결정될 수 있을 것이다. 즉 이를 식으로 표현해보면

$$Q(i, j\,|\,i-1, k) = p(i, j\,|\,i-1, k)\exp[-r_{i-1,k}(t_i - t_{i-1})]$$

$$Q_{i,j} = \sum_k Q(i, j\,|\,i-1, k)\,Q_{i-1,k} \qquad \text{(수식 102)}$$

$$= \sum_k p(i, j\,|\,i-1, k)\exp(-r_{i-1,k}(t_i - t_{i-1}))\,Q_{i-1,k}$$

여기서 합은 t_{i-1}시점의 모든 격자점에 관한 것이다.

t_{i+1} 시점의 모든 격자점에서 1을 지불하는 할인채의 경우에 있어서 이 할인채의 격자점 $(0, 0)$에서의 가격을 P_{i+1}이라고 하고 그리고 격자점 (i, j)에서의 가격을 $V_{i,j}$라고 하자. 그러면 i시점에서 g_i를 결정하기 위해서 다음의 과정을 거쳐야 한다. 먼저 i시점에서의 모든 격자점 j에 대한 $Q_{i,j}$를 결정하여

야 한다. 결정된 root AD 가격을 이용하면 P_{i+1}의 가격을 계산할 수 있다. t_{i+1}시점에서 모든 격자점에서 1을 지불하는 할인채이기 때문에 $V_{i,j}$의 가격은 다음과 같다.

$$V_{i,j} = \exp[-r_{r,j}(t_{i+1}-t_i)] = \exp[-f^{-1}(x_{i,j}+g_i)(t_{i+1}-t_i)]$$

그리고 이것의 현가는

$$P_{i+1} = \sum_j Q_{i,j} V_{i,j} \qquad \text{(수식 103)}$$

$$= \sum_j Q_{i,j}\exp[-f^{-1}(x_{ij}+g_i)(t_{i+1}-t_i)]$$

이다

g_i의 값은 실제 시장의 수익률곡선으로부터 계산되어진 할인채의 값과 위 (수식 103)에서 계산된 값이 일치되어질 때까지 조정되어진다.

시작점에서 1을 지불하는 파생상품의 가격은 당연히 1이고 그래서 $Q_{0,0}$의 값은 1이다. 그러면 (수식 103)에 의해서 t_1에 만기를 가지는 할인채의 가격을 맞추기 위해서 g_0의 값을 계산할 수 있다. 그리고 (수식 102)을 사용함으로서 모든 $Q_{1,j}$의 값을 계산할 수 있고 그리고 (수식 103)을 이용해서 g_1을 계산할 수 있다. 이런 식으로 계속 계산하면 우리는 모든 값을 계산할 수 있다.

예를 들어 간단히 설명을 해보면[18] <표 Ⅵ-1>의 만기별 금리와 채권가격이 주어졌다고 가정하자. 여기서 $x = f(r) = \ln r$ ($r = f^{-1}(x) = e^x$)이고 그리고 금리는 연속복리로서 주어진다.

시작점에서의 방정식을 살펴보면

$$P_1 = Q_{0,0}\exp[-f^{-1}(x_{ij}+g_i)(t_{i+1}-t_i)]$$

$$0.9277 = \exp[-\exp(0+g_0)(1.5)]$$

---

18) John Hull and Alan White, “The General Hull-White Model and Super Calibration”, August 2000.

<표 Ⅵ-1> 만기별 금리 및 채권가격 예

만기	금리	채권가격
1.5	5.00%	0.9277
1.6	5.10%	0.9216
2.0	5.25%	0.9003
2.5	5.30%	0.8759

이고 이를 풀면 $r_{0,0} = f^{-1}(x_{0,0} + g_0) = \exp(-2.9957) = 0.05$, $g_0 = -2.9957$이다. 이 값들은 다시 다음을 계산하는데 사용되어진다.

$$Q_{1,1} = Q_{0,0}\, p_u \exp(-r_{0,0} \times 1.5) = 0.1546$$

$$Q_{1,0} = Q_{0,0}\, p_m \exp(-r_{0,0} \times 1.5) = 0.6185$$

$$Q_{1,-1} = Q_{0,0}\, p_d \exp(-r_{0,0} \times 1.5) = 0.1546$$

이와 같은 방법으로 계속해서 계산하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$r_{i,j}$	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$j=2$			7.677	10.238
$j=1$		11.663	6.514	7.370
$j=0$	5.000	6.172	5.527	5.306
$j=-1$		3.266	4.689	3.820
$j=-2$			3.979	2.750

Ⅶ. 시사점 및 향후 과제

1. 시사점

97년 IMF 이후 급격한 금융환경 변화에 대응하기 위해서 보험사를 비롯한 많은 금융기관은 부단한 노력을 기울여 왔다. 특히 급격한 금리 변동에 따른 리스크를 관리하기 위해서 선진 ALM 기법을 도입 활용하기 시작하였다. 이제 많은 보험사들도 ALM 기법을 사용하고 있으며 더 나아가서 상품 개발 및 보유계약의 부채 Cash Flow등을 평가하기 위해서 여러 가지 종류의 계리 소프트웨어를 사용하고 있다. 이런 일련의 작업에는 금리의 시나리오가 필수적으로 들어간다. 그러나 ALM과 같은 새로운 기법을 도입한지 오래되지 않아서 보험 산업에서 종사하는 전문 인력이 부족한 형편이고 따라서 아직 금리 시나리오의 분석, 연구 및 개발에는 어려움이 따르고 있었으나 최근에 해외에서 교육받고 그리고 현장경험을 쌓은 많은 전문 인력이 업계에서 활동하기 시작하고 국내에서도 많은 교육이 이루어지고 있어서 향후 전망은 밝은 편이다.

90년대 이후 본격적으로 외국에서도 금리 모델에 대한 연구가 이루어졌고 여러 우수한 논문과 책들이 나오기 시작하였다. 그러나 아직 국내에서는 많은 연구논문이나 관련 책들이 발행되지 못하고 있는 형편이어서 현장에서 금리 시나리오 모델에 대한 이론적 이해와 연구 시 어려움이 따르고 있다. 따라서 이 조사보고서는 이러한 어려움에 도움을 주고자 기획되었다. 금리 시나리오 모델에 처음 입문하는 사람이 금리 시나리오 모델을 이해하고 활용하는데 있어서 필요한 기초지식부터 전문지식까지를 폭넓게 다루었다. 금리의 근간이 되는 채권에서부터 시장의 데이터를 이용해서 금리 시나리오 모델의 모수를 결정하는 Calibration까지 다루었다.

2. 향후 과제

앞 절에서 언급한 바와 같이 이 조사보고서는 금리 시나리오 모델의 이해

를 위해서 필요한 기초지식부터 전문지식까지를 폭넓게 다루었다. 금리 시나리오 모델은 통계학과 수학에 기초하는데 이에 대한 이해가 충분하지 못하다면 여전히 모델의 활용에 한계가 있을 수밖에 없을 것이다. 이 조사보고서에서도 그런 부분을 충분히 설명하지 못한 부분이 있다. 또한 국내 채권의 만기수익률을 바탕으로 한 데이터 분석이 이루어지지 않았다. 국내 채권시장에서의 만기수익률곡선의 변동의 주요 요인에 대한 분석이 따르지 않았다. 주성분분석을 통하여 주요 요인분석이 이루어진다면 한국 금융시장의 특성을 보다 정확히 반영해서 금리 시나리오를 생성할 수 있을 것이다. 그리고 한국 채권시장의 실제 데이터를 이용한 모델들의 비교 분석이 없어서 이론적 측면이 아니라 실제적 측면에서 모델의 적합성, 다양성, 편리성 비교가 이루어지지 못하였다. 따라서 이러한 모든 점들을 고려해 볼 때 향후에는 다음과 같은 작업이 후속적으로 보강되어야 할 것이다.

첫째, 금리 시나리오 모델의 수학적, 통계적 연구가 보다 심층적으로 연구되어져야 할 것이다. 이론적 사실에 대한 정확한 연구와 이해가 부족하다면 모델의 사용에 한계가 있을 수 밖에 없을 것이며 향후 새로운 모델의 개발에도 한계가 있을 것이다. 따라서 향후 한국의 금융시장의 특성을 잘 나타내는 모델의 개발을 위해서 보다 자세한 연구가 선행되어야 할 것이다.

둘째, 한국 금융시장에서 금리의 변동 요인에 대한 분석 및 연구가 이루어져야 할 것이다. 환율 또는 미국 국채 금리 등 여러 가지 요인에 영향을 받고 있는 상황에서 이에 대한 충분한 연구 및 분석이 없다면 현실에 맞는 금리 시나리오 생성에 한계가 있을 것이다. 더 나아가서 새로운 모델을 개발할 때에도 주요요인들에 대한 분석을 바탕으로 이를 반영할 수 있을 것이다.

셋째, 실제 자료들을 바탕으로 모델별 비교 분석이 필요하다. 과거의 금리의 움직임에 대한 데이터를 바탕으로 각 모델별로 모수를 결정한 후 시나리오를 생성 비교 분석함으로서 여러 모델들의 특성을 연구할 필요가 있다. 이를 바탕으로 한국 금융시장에서 어떤 모델이 적합한지 또는 어떤 상황에서는 어떤 모델이 적합한가를 살펴볼 수 있을 것이다. 이를 통해 보험회사에서는 상황에 따라 적절한 모델을 선택하여서 사용할 수 있을 것이다.

참고문헌

김광빈, 「금리변동에 따른 보험상품의 손익관리에 관한 연구」, 『보험조사월보』 통권 250호, 보험감독원, 1998. 12.

류건식, 김은주, 「생보사의 예정이율체계에 관한 연구」, 연구보고서 98-13, 삼성금융 연구소, 1998. 8.

류건식, 이도수, 「생명보험회사의 예정이율 리스크에 관한 연구」, 연구보고서 2001-6, 보험개발원, 2001. 4.

박준용, 오규택, 이창용, 「확산과정을 이용한 금리 모형: 추정이론 및 실제분석」, 『경제분석』 제 7권 제 4호, 한국은행, 2001.

유진, 『채권과 금리파생상품』, 서울 : 경문사, 2003, pp.75~124

한국산업은행, 『한국의 채권시장과 수익률 곡선』, 2000, pp. 85~118

K. J. Adam and D. R. van Deventer, "Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness", *Journal of Fixed Income*, 1994, pp.52~62

S. H. Babbs, Geberalised Vasicek, "Models for he Term Structure", *In Applied Stochastic Models of Data Analysis*, 6th Annual Symposium Proceedings, Vol. 1. 1993, pp.49~62

S. H. Babbs and K. B. Nowman, "Econometric Analysis of a Continuous Time Multi-Factor Generalized Vasicek Term Structure Model : International Evidence". *Working Paper*, FNBC, 1997, pp.1~31

P. Balduzzi, S. R. Das, S. Foresi, and R. Sundaram, "A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models", *Journal of Fixed Income*, 6. 1996, pp. 43~53

Robert G. Bartle, *Introduction to Real Analysis*, Hoboken : Wiley, 1999

D.R. Beaglehole and M.S. Tenney, "General Solutions of some Interest Rate Contingent Pricing Equations", *Journal of Fixed Income*, 1991, pp.69~83

R.H. Brown and S. M. Schaefer, "Interest Rate Volatility and the Shape

of the Term Structure", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*,
347. 1994, pp.563～576

A. J. G. Cairns, *Interest Rate Models*, Princeton University Press, 2004

L. Chen, *Interest rate Dynamics, derivatives Pricing and Risk Management*, Springer, LN in Economics and Mathematical systems, 1996

R-R. Chen and L. Scott, "Pricing Interest rate Options in a Two-factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure", *Review of Financial Studies*,
5. 1992, pp.613～636

R-R. Chen and T. T. Yang, "An Integrated Model for the Term and Volatility Structures of Interest rates", *Working paper*, Rutgers University, 1996, pp.1～35

J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53 1985, pp.363～384

―, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53 1985, pp.385～407

Frank J. Fabozzi, *Interest rate, term structure, and valuation modeling*, Hoboken : WIley 2002, pp.27～38

D. Feldman, European, "Options on Bond Futures : A Closed Form Solution", *Journal of Futures Markets*, 13 1993, pp.325～333

G. Fong and O. Vasicek, "Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor". *Working Paper*, Gifford Fong Associates, 1991

T.S.Y. Ho and S.B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, 1986, pp.1011～1029

J.C. Hull, *Options, Futures, & Other Derivatives*, Prentice-Hall, 1999

J.C. Hull and A.D. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25. 1990, pp.87～100

F. Jamshidian, "A Simple Class of Square Root Interest Rate Models", *Applied Mathematical Finance*, 2, 1995, pp.61～72

J. James and N. Webber, *Interest Rate Modelling*, West Sussex Wiley & Sons, 2000.

F. A. Longstaff, "The Valuation of Options on Yields", *Journal of Financial Economics*, 26, 1990, pp.97～121

—, "Multiple Equilibria and Term Structure Models", *Journal of Financial Economics*, 32, 1992, pp.333～344

Y. Maghsoo야, "Solution of the Extended CIR Term Structure and Bond Option Valuation", *Mathematical Finance*, 6. 1996, pp.89～109

J. H. McCulloch, "The Tax Adjusted Yield Curve", *Journal of Finance*, 30, 1975, pp.811～830

C. R. Nelson and A. F. Siegel, "Parsimonious Modelling of Yield Curves", *Journal of Business*, 60, 1985, pp.473～489

L. T. Nielsen and J. Saa-Requejo, "Exchange Rates and Term Structure Dynamics and the Pricing of Derivative Securities", *Working Paper*, INSEAD, 1993.

J. Nunes, "Interest Rate Derivatives in a Duffie and Kan Model with Stochastic Volatility : Application of Green's Function", *Working Paper*, University of Warwick, 1998

A. Pelsser, "Efficient Methods for Valuing and Managing Interest Rate and Other Derivative Securities", *PhD Thesis*, Erasmus University, Rotterdam, 1996

J. Rhee, "Interest Rate Models", *PhD Thesis*, University of Warwick, 1999

S. F. Richard, "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6, 1978, pp.33～57

C. S∅rensen, "Option Pricing in a Gaussian Two-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates", *Working Paper*, Copenhagen Business School, 1994

J. M. Steeley, "Estimating the Gilt-Edged Term Structure : Basis Splines and Confidence Intervals", *Journal of Business Finance and Accounting*, 18, 1991, pp.513～530

O. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp.177～188

O. Vasicek and G. Fong, "Term Structure Modelling Using Exponential Splines", *Journal of Money, Credit and Banking*, 25, 1993, pp.259～272

J. Wiseman, "The Exponential Yield Curve Model", *European Fixed Income Research, Technical Specification*, JP Morgan, 1994

[부록]

Ⅰ. 금리모형에 사용되는 주요 정리들

1. Weierstrass' Approximation Theorem

정리 : 닫힌 구간(compact set) $[a, b]$ 위에 실변수 연속함수 f 가 주어졌을 때 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대해서 어떤 다항식 함수 $p(x)$가 항상 존재하여 다음을 만족한다.

$$[a, b] \text{ 위의 모든 점 } x \text{ 에서 } |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

Weierstrass's Approximation Theorem의 의해서 어떤 닫힌구간 안에서 연속인 함수가 주어지면 항상 근사함수를 구할 수 있다. 그러므로 복잡한 함수가 주어 졌어 다루기가 힘들 때 이 Weierstrass's Approximation Theorem에 의해서 간단한 다항함수로 대체할 수 있다.

2. Girsanov's Theorem

정리 : 확률측도 P 에 대해 $\overline{W_t}$를 P 브라운 운동이라고 하고 γ_t는 $E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 \, dt)]$이 유한하게 되는 process 라고 하자. 그러면 다음을 만족하는 확률 측도 Q 가 존재한다,

(i) 확률측도 Q 와 확률측도 P 는 equivalent[19) 하다.

(ii) $\dfrac{dQ}{dP} = \exp(-\int_0^T \gamma_t \, d\overline{W_t} - \dfrac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 \, dt)$

(iii) $W_t = \overline{W_t} + \int_0^t \gamma_s \, ds$이 확률측도 Q 에 대한 브라운 운동이 된다.

Girsanov 정리의 역정리 : $\overline{W}$ 가 P-브라운 운동이고 확률측도 Q가 P 와 equivalent 하다면

---

19) measure P 와 measure Q가 equivalent 하다는 것은 P(A) = 0 가 되는 모든 집합 A에 대해서 Q(A) = 0 이 성립한다는 것이다.

$$W_t = W_t + \int_0^t \gamma_s \, ds$$

가 Q-브라운 운동이 되는 process γ_t 가 존재한다.

3. Ito's formula

가. Ito's isometry Theorem

함수 $\Phi(t,\omega) \in L^2(0, T)$ 가 주어지면 다음이 성립한다

$$E[\,(\int_0^T \Phi(t,\omega)\, dW(t,\omega))^2] = E[\int_0^T \Phi(t,\omega)^2 dt]$$

나. Ito's Lemma

변수 x가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 가정하자.

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz \qquad (\text{I} - 1)$$

여기서 dz는 위너과정(Wiener process)이고 a 와 b는 변수 x, t의 함수이다. 그러면 변수 x, t의 함수 G는 다음을 만족한다.

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b \, dz \qquad (\text{I} - 2)$$

여기서 dz는 (Ⅱ - 1)에 있는 것과 같은 위너과정(Wiener process)이다.

4. 채권가격에 대한 미분방정식

정리 : 주어진 측도 $\mathbb{P}$와 $\mathbb{P}$-브라운 운동 $\overline{W}(t)$ 을 사용해 나타낸 다음과 같은 one factor short rate 모델을 생각하자.

$$dr(t) = \overline{\mu}(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\overline{W}(t) \qquad (\text{I} - 3)$$

채권 시장에 arbitrage 가 없다면 만기 T 의 채권가격 $P(t,T)$ 는 다음과 같은 미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t}+(\overline{\mu}-\lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0$$

$$P(T,T)=1$$

여기서 λ는 market price of risk 를 나타낸다.

증명 : 채권 가격에 대한 process $P(t,T)$ 에 대해 Ito formula를 적용시키자.

$$dP=\frac{\partial P}{\partial t}dt+\frac{\partial P}{\partial r}dr+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(dr)^2 \qquad (\text{I} - 4)$$

여기에 (식 I -3)의 dr 을 대입하자. Ito-formula 에 의해서

$$dt\bullet dt=0,\quad dt\bullet d\overline{W}(t)=0,\quad d\overline{W}(t)\bullet d\overline{W}(t)=dt$$

$$(dr)^2=\sigma^2\,dt$$

가 된다. 따라서 (I - 4)는 다음과 같이 정리된다.

$$dP=\frac{\partial P}{\partial t}dt+\frac{\partial P}{\partial r}(\overline{\mu}\,dt+\sigma\,d\overline{W}(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2\,dt$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\overline{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2\right)dt+\sigma\frac{\partial P}{\partial r}d\overline{W}(t)$$

이것을 채권의 확률 미분방정식

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}=m(t,T)\,dt+v(t,T)\,d\overline{W}(t)$$

과 비교하면

$$m = \frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2), \qquad v = \frac{1}{P}\sigma\frac{\partial P}{\partial r}$$

이다. 채권시장에 arbitrage 가 없다고 가정한다면 확률측도 P 에 대해 모든 만기의 채권은 같은 market price of risk $\lambda(t)$

$$\frac{m(t, T) - r(t)}{v(t, T)} = \lambda(t)$$

를 갖는다.
market price of risk $\lambda(t)$의 식에 m 과 v의 값을 대입하여 다시 정리하면

$$\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2) - r = \lambda(t)\frac{1}{P}\sigma\frac{\partial P}{\partial r}$$

가 된다.
$P(T, T) = 1$ 는 당연한 사실이므로 증명이 끝난다.

■

위의 정리는 확률측도 $\mathbb{P}$에 관해서 성립하는 것이다. 확률측도 $\mathbb{Q}$에 관해서 살펴보면 다음과 같은 정리를 가진다.

정리 : 마팅게일 확률측도 Q와 Q-브라운 운동 $W(t)$을 사용해 나타낸 다음과 같은 one factor short rate 모델을 생각하자.

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\overline{W}(t)$$

채권시장에 arbitrage가 없다면 만기 T 의 채권가격 $P(t, T)$는 다음과 같은 편미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$
$$P(T, T) = 1$$

증명 : 마팅게일 확률 측도 Q 에서는 market price of risk $\lambda(t)$는 0 이므로 위의 정리에 의해서 증명이 끝난다.

■

II. 금리시나리오 생성모델의 증명들

1. Ho-Lee 모델

Ho-Lee 모델의 affine 모델 증명.

Affine 모델이라는 것을 보이기 위해서 채권가격 $P(t,T)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있음을 보이면 된다

$$P(t,T) = e^{-A(t,T) - B(t,T)r_t} \qquad (\text{II - 1})$$

한편 채권가격 $P(t,T)$ 는 다음과 같음을 알고 있기 때문에

$$P(t,T) = e^{-r_t(T)(T-t)} \qquad (\text{II - 2})$$

두 식 (Ⅱ - 1)과 (Ⅱ - 2)의 비교를 통해서 우리는 spot rate의 정확한 식을 구할 수 있다. Ho-Lee 모델은 미분방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$dr_u = \Theta(u)\,dt + \sigma dz_u \qquad (\text{II - 3})$$

양변은 t 에서 s 까지 적분을 하면

$$\int_t^s dr_u = \int_t^s \Theta(u)\,du + \int_t^s \sigma dz_u \qquad (\text{II - 4})$$

이고 따라서

$$r_s - r_t = \int_t^s \Theta(u)\,du + \int_t^s \sigma dz_u \qquad (\text{II - 5})$$

을 구할 수 있다.

r_s 는 시간 s 에서의 short rate이기 때문에 현재시점 t 에서부터 만기시점 T 까지 적분을 할 수 있으며, 따라서 (Ⅱ - 5)의 r_t 를 우변으로 옮긴 후 양변을 적분하면

$$\int_t^T r_s = \int_t^T r_t + \int_t^T \int_t^s \Theta(u)\,duds + \sigma \int_t^T \int_t^s dz_u ds \qquad (Ⅱ - 6)$$

이다. 여기서 r_t 는 상수이고 $T - t = \tau$ 라고 하면 식 (7 - 6)은 다음과 같이 정리된다.

$$r_t \tau + \int_t^T \int_t^s \theta(u)\,duds + \sigma \int_t^T \int_t^s dz_u ds \qquad (Ⅱ - 7)$$

$\int_t^T r_s\, ds$ 의 기대값을 구해보면

$$E(\int_t^T r_s ds) = E(r_t \tau + \int_t^T \int_t^s \Theta(u) duds + \sigma \int_t^T \int_t^s dz_u ds) \qquad (Ⅱ - 8)$$

우변의 첫 두 항은 상수이므로

$$E(\int_t^T r_s ds) = r_t \tau + \int_t^T \int_t^s \Theta(u) duds + \sigma E(\int_t^T \int_t^s dz_u ds) \qquad (Ⅱ - 9)$$

Fubini Theorem 과 $E[dz_u] = 0$ 에 의해서

$$\begin{aligned} E(\int_t^T r_s ds) &= r_t \tau + \int_t^T \int_t^s \Theta(u) duds + \sigma \int_t^T \int_t^s E[dz_u] ds \\ &= r_t \tau + \int_t^T \int_t^s \Theta(u) duds \end{aligned}$$

$\int_t^T r_s ds$ 의 분산을 구해보면

$$Var(\int_t^T r_s ds) = Var(r_t\tau + \int_t^T\int_t^s \Theta(u)duds + \sigma\int_t^T\int_t^s dz_u ds)$$

$$= \sigma^2 Var(\int_t^T\int_t^s dz_u ds)$$

$$= \sigma^2 Var(\int_t^T\int_t^u ds dz_u)$$

$$= \sigma^2 Var(\int_t^T (u-t) dz_u)$$

$$= \sigma^2 E[(\int_t^T (u-t) dz_u)^2] - [E(\int_t^T (u-t) dz_u)]^2$$

다시 한번 $E[dz_u] = 0$ 에 의해서 마지막 항은 0 이 된다. 따라서

$$Var(\int_t^T r_s ds) = \sigma^2 E[(\int_t^T (u-t) dz_u)^2]$$

Ito's Isometry Theorem에 의해서

$$= \sigma^2 E[\int_t^T (u-t)^2 du]$$

$$= \frac{\sigma^2}{3}(T-t)^3 = \frac{\sigma^2}{3}\tau^3$$

그러므로 $X = \int_t^T r_s ds$ 라고 가정했을 경우

$$E(X) = r_t\tau + \int_t^T\int_t^s \Theta(u) duds$$

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{3}\tau^3$$

을 구하였다.

한편 채권의 현재가격 $P(t,T) = e^{-r_t(T)(T-t)}$ 은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$E(e^{-X}) = e^{E(-X) + \frac{1}{2}V(-X)}$$
$$= e^{-r_t\tau - \int_t^T \int_t^s \Theta(u)\,du\,ds + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{3}\tau^3}$$

지수는 r_t의 선형이므로 Ho-Lee 모델은 affine 모델이다.
나아가서 정확한 spot rate의 식을 채권가격에 대한 두식의 지수를 비교함으로서 구할 수 있다.

$$r_t(\tau) = r_t - \frac{\sigma^2}{6}\tau^2 + \frac{1}{\tau}\int_t^T \int_t^s \Theta(u)\,du\,ds$$

2. Vasicek 모델의 affine 모델 증명

Vasicek 모델이 affine 모델이라는 것을 구해보자.
Vasicek 모델은 다음과 같이 표현된다.

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)\,dt + \sigma dz_t$$

r_t 에 관해서 묶은 후 $e^{\alpha t}$ 를 곱해주면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$d(r_t e^{\alpha t}) = \alpha\mu e^{\alpha t}dt + \sigma e^{\alpha t}dz_t$$

양변을 t에서부터 s까지 적분하면

$$r_s e^{\alpha s} - r_t e^{\alpha t} = \int_t^s \alpha\mu e^{\alpha u}du + \int_t^s \sigma e^{\alpha u}dz_u$$
$$= \mu(e^{\alpha s} - e^{\alpha t}) + \int_t^s \sigma e^{\alpha u}dz_u$$

이다. 그러므로

$$r_s = r_t e^{-\alpha(s-t)} + \mu(1 - e^{-\alpha(s-t)}) + \int_t^s \sigma e^{-\alpha(s-u)}dz_u$$

양변을 t 에서 T 까지 적분하면

$$\int_t^T r_s ds = \int_t^T r_t e^{-\alpha(s-t)}\, ds + \int_t^T \mu(1 - e^{-\alpha(s-t)})\, ds + \int_t^T \int_t^s \sigma e^{-\alpha(s-u)} dz_u\, ds$$

$$= -\frac{r_t}{\alpha}(e^{-\alpha(T-t)} - 1) + \mu(T-t) - \frac{\mu}{\alpha}(-e^{-\alpha(T-t)} + 1) + \int_t^T \int_t^s \sigma e^{-\alpha(s-u)} dz_u\, ds$$

$X = \int_t^T r_s ds$ 기대값을 구해보면 마지막 항은 $E[dz_u] = 0$ 이기 때문에 Ho-Lee의 경우와 유사한 계산을 통하여 다음과 같은 기대값을 구할 수 있다.

$$E(X) = \mu\tau + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}(r_t - \mu)$$

그리고 $Var(X)$을 구하면

$$Var(X) = \sigma^2\, Var\left(\int_t^T \int_t^s e^{-\alpha(s-u)} dz_u\, ds\right)$$

$$= \sigma^2\, Var\left(\int_t^T \int_t^u e^{-\alpha(u-s)} ds\, dz_u\right)$$

$$= \sigma^2\, Var\left(\int_t^T \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(u-t)})\, dz_u\right)$$

$$= \sigma^2 E\left[\left(\int_t^T \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(u-t)})\, dz_u\right)^2\right]$$

Ito's Isometry Theorem에 의해서

$$Var(X) = \sigma^2 \int_t^T \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(u-t)})^2 du$$

$$= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} (\tau - \frac{\alpha}{2} (\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha})^2 - \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha})$$

따라서

$$E(X) = \mu\tau + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} (r_t - \mu)$$

$$Var(X) = \sigma^2 (\tau - \frac{\alpha}{2} (\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha})^2 - \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha})$$

이고 Ho-Lee 의 경우와 마찬가지 방법을 통하여

$$P(t, T) = e^{-E(X) + Var(X)}$$

$$= e^{-r_t(\tau)\tau}$$

따라서

$$r_t(\tau) = \mu + (r_t - \mu) \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha\tau} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2\tau} (\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} (\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha})^2)$$

r_t 의 선형이므로 Vasicek 모델은 affine 모델이다.

3. HJM 모델에서 추세와 변동성의 관계

HJM 모델의 확률미분방정식은 다음과 같이 표현될 때

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t \qquad (\text{II} - 10)$$

$\alpha(t, T)$는 아래와 같이 $\sigma(t, T)$에 관한 식으로 표현된다.

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)\int_t^T \sigma(t, x)\,dx \qquad (\text{Ⅱ - 11})$$

이것은 채권의 가격에 대한 확률미분 방정식으로부터 유도될 수 있다. risk neutral 측도하에서의 채권에 관한 확률미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)\,dt + v(t, T)\,dW(t) \qquad (\text{Ⅱ - 12})$$

선도금리(forward rate)의 정의에 따라서 채권과의 가격을 살펴보면

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\log P(t, T_1) - \log P(t, T_2)}{T_2 - T_1} \qquad (\text{Ⅱ - 13})$$

이다. (Ⅱ - 12)와 (Ⅱ - 13)을 이용하면 선도금리(forward rate)에 관한 확률미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$df(t, T) = v(t, T)v_T(t, T)dt - v_T(t, T)\,dW(t) \qquad (\text{Ⅱ - 14})$$

한편, $v(t, t) = 0$ 이므로, 다음을 구할 수 있다.

$$\int_t^T v_T(t, x)\,dx = v(t, T) - v(t, t) = v(t, T) \qquad (\text{Ⅱ - 15})$$

(Ⅱ - 10) 과 (Ⅱ - 11)를 비교하면 $\sigma(t, T) = -v_T(t, T)$ 임을 알 수 있고 따라서 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\alpha(t, T) = v_T(t, T)\int_t^T v_T(t, x)\,dx = -\sigma(t, T)\int_t^T (-\sigma(t, x))\,dx \qquad (\text{Ⅱ - 16})$$

4. HJM 모델의 Non-Markovian 증명

정리 : HJM 모델은 markovian 모델이 아니다.

증명 : one factor HJM 모델의 확률미분 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t \qquad (\text{II} - 17)$$

drift condition에 의해서 $\alpha(t,T)$는 $\sigma(t,T)$의 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du$$

선도금리 $f(t,T)$의 정의에 의해서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

양변을 T에 관해서 적분을 하면

$$\ln P(t,T) = -\int_t^T f(t,s)\,ds$$

이다. 여기서 $\int_0^t df(u,s) = f(t,s) - f(0,s)$ 과 (II - 17) 을 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\ln P(t,T) = \int_t^T [-f(0,s) - \int_0^t df(u,s)\,]\,ds$$

$$= -\int_t^T f(0,s)\,ds - \int_t^T\int_0^t (\alpha(u,s)\,du + \sigma(u,s)\,dW_u)\,ds$$

$$= -\int_t^T f(0,s)\,ds - \int_t^T\int_0^t (\sigma(u,s)\int_u^s \sigma(u,l)dl)du ds - \int_t^T\int_0^t \sigma(u,s)\ dW_u\,ds$$

마지막 항에서 random 변수 W_u를 가진다. 그런데 u 의 적분범위는 0에서 t 까지 이다. 따라서 과거의 정보가 영향을 미치게 된다. 그러므로 Markovian이 아니다.

보험개발원(KIDI) 발간물 안내

■ 연구보고서

96-1	손해보험 가격자유화 이후의 보험시장 전망과 대응방안 / 최용석, 1996.4
96-2	보험회사 종합금융기관화 전략 / 오영수, 1997.2
96-3	자동차사고 피해자의 사회적 보호제도에 관한 연구 : 자동차보험 무보험 운전자 문제를 중심으로 / 서영길, 박중영, 1997.3
96-4	자동차보험 요율체계의 적정성 분석에 관한 연구 / 서영길, 박중영, 장동식, 1997.3
96-5	보험회계제도에 관한 연구, / 김규승, 양성문, 장강봉, 1997.3
96-6	분리계정제도의 도입타당성과 세부도입방안 / 이근영, 박태준, 장강봉, 1997.3
96-7	사회환경변화와 민영보험의 역할 (I) : 총론 / 오영수, 이경희, 김란, 1997.3
96-8	생명보험 가격자유화 방안 : 예정이율 및 계약자배당을 중심으로 / 정봉은, 노병윤, 목진영, 1997.3
96-9	생명보험 모집조직의 효율화 방안 / 김규승, 박홍민, 장재일, 1997.3.
97-1	보증보험의 발전방안 연구 / 이희춘, 신동호, 이기형, 이준섭, 1997.5.
97-2	남북 경협 증대 및 통일에 대비한 보험산업 대응방안 연구 : 독일 모델을 중심으로 / 신동호, 안철경, 조혜원, 1997.11
98-1	보험산업의 M&A에 관한 연구 : 주요국의 M&A 추세 및 유인을 중심으로 / 김호경, 박태준, 1998.1
98-2	생명보험회사의 적정성장에 관한 연구 / 이원돈, 이승철, 장재일, 1998.2
98-3	생명보험 예정사업비의 합리적 결정에 관한 연구 / 이원돈, 노병윤, 장강봉, 1998.2
98-4	사회환경변화와 민영보험의 역할(Ⅱ) : 연금개혁과 보험회사의 역할 / 오영수, 이경희, 1998.3
98-5	주요국의 새로운 보험판매채널 활용사례분석 및 국내사의 운용전략 / 정재욱, 정영철, 한성진, 1998.3
98-6	보험기업 경영진단시스템 : 생명보험회사를 중심으로 / 김호경, 김혜성, 1998.3
98-7	퇴직연금 계리 및 재정 / 성주호, 김진억, 1998.6
98-8	생명보험 예정이율의 안전성 분석 및 운용방안 / 이원돈, 이승철, 장강봉, 1998.10
99-1	사회환경변화와 민영보험의 역할(Ⅲ) : 의료보험개혁과 보험회사의 역할 / 오영수, 이경희, 1999.2
99-2	자동차보험 자기부담금제도에 관한 연구 / 이득주, 서영길, 장동식, 1999.3

99-3	국민연금 민영화방안에 관한 연구 : 국민연금의 효율성 제고를 위한 접근방안 / 성주호, 김진억, 1999.3
99-4	손해보험 상품개발시스템 및 전략에 대한 연구 / 신동호, 이희춘, 차일권, 조혜원, 1999.3
99-5	생존분석기법(Survival Analysis)을 이용한 생명보험 실효·해약 분석 / 강중철, 장강봉, 1999.3
99-6	보험사기 성향 및 규모추정 : 손해보험을 중심으로 / 박일용, 안철경, 1999.7
99-7	사업비차배당제도의 도입 및 대응방안 / 노병윤, 장강봉, 1999.12
99-8	보험사기 적발 및 방지방안 / 안철경, 박일용, 1999.12
2000-1	손해보험의 부가보험요율 산출 및 운영방안 연구 / 이희춘, 조혜원, 2000.3
2000-2	ART를 활용한 손보사의 위험관리 방안 연구 / 신동호, 2000.3
2000-3	생명보험회사 투자포트폴리오 결정요인과 투자행동 / 목진영, 2000.3
2000-4	생명보험상품의 손익기여도 분석 / 노병윤, 장강봉. 2000.3
2000-5	보험산업의 전자상거래 구축 및 효율적 운영방안 / 안철경, 박일용, 오승철, 2000.3
2000-6	금융겸업화에 대비한 보험회사의 경영전략 / 김헌수, 2000.6
2000-7	보험회사 지식자산의 가치측정모형 연구 / 이도수, 김해식. 2000.8
2000-8	환경변화에 대응한 생보사의 상품개발전략 / 류건식, 이경희. 2000.9
2000-9	향후 10년간 국내보험산업 시장규모 및 트랜드 분석 / 동향분석팀. 2000.11
2000-10	보험회사의 판매채널믹스 개선방안 연구 / 정홍주. 2000.12
2001-1	사이버시장 분석 및 향후 과제 / 안철경, 장동식, 2001.1
2001-2	OECD 국가의 생명보험산업 현황 및 효율성에 관한 연구 / 정세창, 권순일, 김재봉, 2001.1
2001-3	손해보험 종목별 투자수익 산출 및 요율 적용 방안 / 이희춘, 조혜원, 2001.1
2001-4	생명보험회사의 리스크관리 실태분석 / 류건식, 이경희, 2001.3
2001-5	보험회사의 북한 진출에 관한연구 / 신동호, 안철경, 박홍민, 김경환, 2001.3
2001-6	생명보험회사의 예정이율 리스크에 관한 연구 / 류건식, 이도수, 2001.4
2001-7	보험회사 CRM에 관한 연구 : CRM 성공요인 및 성과분석을 중심으로 / 안철경, 조혜원 2001.8
2001-8	생명보험산업의 자산운용규제 개선 방향에 관한 연구 / 김재현, 이경희, 2001.10
2001-9	건강보험에서의 보험회사 역할 확대방안 / 박홍민, 김경환, 2001.10

2001-10	노령화사회의 진전에 따른 민영장기간병보험 발전방안 / 김기홍, 2001.12
2001-11	국제보험회계기준 연구 / 김해식, 2001.12
2002-1	국내외 보험사기 관리 실태 분석 / 안철경, 김경환, 조혜원, 2002. 3
2002-2	기업연금시장 활성화와 보험회사 대응전략 / 박홍민, 이경희, 2002. 3
2002-3	보험회사 리스크 감독 및 관리방안 연구 / 류건식, 정석영, 이정환, 2002. 5
2002-4	생명보험회사의 시장지위별 마케팅 경쟁 / 신문식, 김경환, 2002. 5
2002-5	생명보험사 RBC제도에 관한 연구 / 류건식, 천일영, 신동현, 2002. 10
2002-6	생명보험회사의 고객유지전략 / 신문식, 장동식, 2002. 10
2002-7	방카슈랑스 환경에서의 보험회사 대응전략 / 정세창,박홍민,이정환, 2002. 12
2002-8	생명보험사 보험리스크 평가에 관한 연구 / 류건식,신동현,배윤희, 2002. 12
2003-1	민영건강보험의 언더라이팅 선진화 방안 / 오영수, 이경희, 2003. 3
2003-2	보험회사의 실버산업 진출방안 / 박홍민, 권순일, 이한덕, 2003. 3
2003-3	보험회사 사이버마케팅의 활용전망 / 신문식, 장동식, 2003. 3
2003-4	생명보험사 RAS체제에 관한 연구 / 류건식, 김해식, 정석영, 2003. 7
2003-5	보험소비자를 위한 보험교육방안 / 이기형, 조재현, 2003. 11
2003-6	보험설계사 조직의 개편방안 / 신문식, 이경희, 이정환, 2003. 12
2004-1	부유층 시장에 대한 보험회사의 자산관리사업 운영방안 / 신문식, 이경희, 2004 .3
2004-2	퇴직연금 규제감독체계에 관한 연구 / 류건식,이태열 2004.7
2004-3	보험회사의 퇴직연금 리스크 관리전략 / 류건식, 김세환 2004.7
2004-4	퇴직연금 활성화를 위한 세제체계 연구 / 임병인, 김세환 2004.9
2004-5	신용리스크 전가시장과 보험회사 참여에 대한 연구 / 주민정, 조재현 2004.10
2004-6	보험회사의 퇴직연금 마케팅 전략 / 류건식, 신문식, 정석영 2004.12
2004-7	예금보험제도의 개선방안 / 이순재 2005.1

■ 연구조사자료

96-1	주요국의 보험브로커제도 및 관련법규 현황 / 김기홍, 김평원, 정봉은, 유지호, 1996.2
96-2	독일 보험감독법, 1996.2
96-3	주요국의 생산물 배상책임보험제도 운영현황 / 이기형, 김란, 조혜원, 1996.10
96-4	캡티브 보험사 설립에 관한 연구 / 김평원, 오평석, 안철경, 조혜원, 1996.12
96-5	미국 보험회사의 파산과 지불능력규제 / 이재복, 1997.3
97-1	국제보험세미나 (IIS) 발표 논문집 (제 33차), 1997.7
97-2	태평양보험회의 (PIC) 발표 논문집 (제 18차), 1997.9
98-1	전문직 위험과 배상책임보험 (I) / 김영욱, 차일권, 1998.2
98-2	손해보험 가격평가방법에 관한 연구 / 서영길, 박중영, 장동식, 1998.3
98-3	자동차보험 의료비통계를 이용한 자동차사고 상해에 관한 분석 / 자동차보험본부, 1998.3
98-4	보험회사의 적대적 M&A와 대응수단에 관한 연구 / 김호경, 박상호, 장재일, 1998.8
98-5	MAI협상의 진전과 국내보험산업에의 시사점 / 정영철, 한성진, 1998.8
98-6	보험회사의 리스크 증대와 대응 / 이기형, 박중영, 장기중, 1998.10
98-7	전문직 위험과 배상책임보험(Ⅱ) : 의료사고위험을 중심으로 / 신동호, 차일권, 1998.11
99-1	전문직 위험과 배상책임보험(Ⅲ) : 임원배상책임보험 / 엄창희, 1999.1
99-2	최근 우리나라 보험산업의 현황 및 제도 변화 / 김호경, 박상호, 1999.3
99-3	자동차보험 의료비통계를 이용한 자동차사고 상해에 관한 분석 / 자동차보험본부, 1999.3
99-4	미국의 퇴직연금 회계제도 연구 / 김해식, 1999.6
99-5	우리나라 보험산업의 구조조정 : 외국사례 및 생명보험산업을 중심으로 / 정봉은, 이승철, 1999.7
99-6	주요국의 보험법제 비교 / 이원돈, 정봉은, 신동호, 안철경, 1999.7

99-7	지진재해와 지진보험 : 일본의 지진보험을 중심으로 / 이상우, 1999.7
99-8	주요국의 보험계리인제도 / 최용석, 노병윤, 1999.8
99-9	생명보험 계약심사제도 / 장강봉, 1999.11
99-10	자동차보험 의료비통계를 이용한 자동차사고 상해에 관한 분석 / 자동차보험본부, 2000.2
2000-1	세계 재보험시장의 발전과 규제환경 / 엄창희, 2000.3
2000-2	보험사의 지식경영 도입방안 / 김해식, 2000.3
2001-1	보험회사 겸업화 추세와 국내 보험회사의 대응전략 / 이경희, 2001.1
2001-2	자동차보험 의료비통계를 이용한 자동차사고 상해에 관한 분석 / 보험2본부, 2001.1
2001-3	지방채보험 제도 도입방안 / 안철경, 엄창희, 2001.3
2001-4	금융·보험 니드에 관한 소비자 설문 조사 / 동향분석팀, 2001.3
2001-5	종업원복지 재구축을 위한 보험회사의 역할 / 오영수, 박홍민, 이한덕, 2001.6
2001-6	보험환경 변화와 보험제도 변화(I) / 보험1본부, 2001.11
2001-7	보험환경 변화와 보험제도 변화(II) / 보험연구소, 2001.11
2002-1	보험니드에 관한 소비자 설문조사 / 보험연구소, 2002.3
2002-2	국내 유사보험 감독 및 사업현황 / 김진선, 안철경, 권순일, 2002.9
2003-1	2003년 보험소비자 설문조사 / 동향분석팀 , 2003.3
2003-2	보험회사의 경영리스크 관리방안 / 천일영, 주민정, 신동현, 2003.3
2004-1	2004년도 보험소비자 설문조사 / 동향분석팀 2004.3
2004-2	보험회계의 국가별 비교 / 김해식 2004.

■ 정책연구자료

97-1	금리변동에 따른 보험회사의 금리리스크 분석 / 이원돈, 노병윤, 장강봉, 1997.10
97-2	'98년도 보험산업 전망과 과제, 1997.11
98-1	'99년도 보험산업 전망과 과제, 1998.11
99-1	2000년도 보험산업 전망과 과제, 1999.11
99-2	예금보험제도 개선방안에 관한 연구 : 보험산업 중심으로- / 이승철, 1999.12
2000-1	2001년도 보험산업 전망과 과제, 2000.10
2001-1	신용보험의 활성화 방안 연구 / 신동호, 김경환, 2001.1
2001-2	2002년도 보험산업 전망과 과제, 2001.11
2001-3	세계금융서비스 산업의 겸업화와 감독기구의 통합 및 시사점 / 정세창, 권순일, 2001.12
2002-1	2003년도 보험산업 전망과 과제, 2002.11
2003-1	주요국의 방카슈랑스 규제 / 안철경, 신문식, 이상우, 조혜원, 2003.7
2003-2	2004년도 보험산업 전망과 과제, 2003.12
2004-1	2005년도 보험산업 전망과 과제/동향분석팀 2004.11
2005-1	영국 통합금융업법상 보험업의 일반성과 특수성 /한기정 2005.2

■ 연구논문집

1호	보험산업의 규제와 감독제도의 미래 / Harold D. Skipper, Robert W. Klein, Martin F. Grace, 1997.6
2호	세계보험시장의 변화와 대응방안 / D. Farny, 전천관, J. E. Johnson, 조해균, 1998.3
3호	제1회 전국대학생 보험현상논문집, 1998.11
4호	제2회 전국대학생 보험현상논문집, 1999.12

■ Insurance Business Report

1호	일산생명 파산과 시사점, 1997.5
2호	OECD 회원국의 기업연금제도 / 정재욱, 정영철, 1997.10
3호	손해보험의 금융재보험 동향 / 이기형, 김평원, 1997.11
4호	금융위기에 대한 대책과 보험산업 / 김호경, 1997.12
5호	멕시코 보험산업의 IMF 대응사례와 시사점 / 정재욱, 1998.3
6호	주요국 기업연금보험 개요 및 세제 / 양성문, 1998.3
7호	일본의 보험개혁과 보험회사의 대응 / 이기형, 장기중, 1998.5
8호	구조조정에 따른 보험산업의 대응전략 : 상품, 마케팅, 자산운용, 재무건정성을 중심으로 /노병윤, 안철경, 이승철, 1999.2
9호	보험산업에서의 정보기술(IT)의 활용 : 손해보험 중심으로 / 최용석, 1999.3
10호	자동차보험 가격자유화의 영향과 대책 / 박중영, 1999.3
11호	IMF체제 이후 보험산업의 환경변화와 전망 / 양성문, 김해식, 1999.3
12호	최근의 환경변화와 생명보험회사의 대응 / 강중철, 목진영, 1999.10
13호	21세기 보험산업 환경변화와 보험회사의 전략적 대응방안 / 오영수, 최용석, 이승철, 1999.12
14호	중국의 WTO 가입과 보험시장 개방 / 정회남, 2002.4
15호	주 5일 근무제 도입에 따른 보험산업의 영향과 대응 / 동향분석팀, 2002.9
16호	2010년 보험산업 트렌드 분석 및 시사점 / 조혜원, 2003.5
17호	유럽보험회사 파산사례의 리스크 분석 및 감독방안 / 신동현, 2003.5
18호	미국 배상책임보험의 최근 현황과 시사점 / 이기형, 조재현, 2003.8
19호	공정가치회계가 보험사 경영에 미치는 영향 -보험사 CEO 대상 설문조사 결과 / 이기형,김해식 2004.10

■ 영문발간물

1호	Environment Changes in the Korean Insurance Industry in Recent Years : Institutional Improvement, Deregulation and Liberalization / Hokyung Kim, Sango Park, 1995.5
2호	Korea Insurance Industry 2000 / Insurance Research Center, 2001.4
3호	Korea Insurance Industry 2001 / Insurance Research Center, 2002.2
4호	Korea Insurance Industry 2002 / Insurance Research Center, 2003.2
5호	Korea Insurance Industry 2003 / Insurance Research Center, 2004.2
6호	Korean Insurance Industry 2004 / Insurance Research Center, 2005.2

■ CEO Report

2000-1 일본 제일화재의 파산에 따른 국내 손보산업에의 시사점 / 양성문, 김혜성, 2000.5

2000-2 일본 제백생명의 파산에 따른 국내 생보산업에의 시사점 / 보험연구소, 2000.6

2000-3 최근 금융시장 불안과 보험회사 자산운용 개선방안/김재현, 2000.10

2000-4 보험회사의 보험사기 적발 및 방지활동과 기대효과 / 안철경, 2000.11

2001-1 부동산권리보험 도입현황과 시사점 / 신문식, 권순일, 2001.8

2001-2 자동차보험 가격경쟁 동향과 향후과제 / 서영길, 기승도, 2001.8

2001-3 일반 손해보험 가격자유화 추진 경과와 향후 과제 / 이희춘, 문성연, 2001.10

2002-1 금융재보험의 도입과 향후과제 / 보험연구소, 2002.4

2002-2 PL법 시행에 따른 PL보험 시장전망과 선진사례 시사점 / 손해보험본부, 2002.6

2002-3 종신보험상품의 예상 리스크 및 시사점 / 생명보험본부, 2002.6

2002-4 주 5일 근무제와 자동차보험 / 자동차보험본부, 2002.9

2002-5 CI(Critical Illness)보험의 개발과 향후 운영방안 / 생명보험본부, 2002.10

2002-6 자동차보험시장 동향 및 전망 / 자동차보험본부, 2002.10

2003-1 장기손해보험 상품운용전략 / 장기손해보험팀, 2003.2

2003-2 2003년 보험소비자 설문조사 / 동향분석팀, 2003.3

2003-3 인구의 노령화와 민영보험의 대응 / 오영수, 2003.6

2003-4 국가재해관리시스템 개편에 따른 보험제도 운영방향 / 손해보험본부, 2003.7

2003-5 생명보험산업에서의 경험통계 활용방안 / 생명보험본부, 2003.7

2003-6 OECD의 기업연금 재정안정화 논의와 시사점 / 동향분석팀, 2003.8

2003-7 퇴직연금시장 전망과 보험회사의 대응과제 / 류건식, 남효성, 박홍민, 2003.12

2004-1 자동차보험 예정기초율 연구 및 전략적 시사점 /자동차보험본부 , 2004.2

2004-2 보험회사의 방카슈랑스 제휴 성공전략 / 연구조정실, 2004.2

2004-3 보험부채의 공정가치 평가와 향후과제 / 생명보험본부, 2004.2

2004-4 자동차보험 손해율 악화원인 분석 및 전략적 시사점 / 자동차보험본부, 2004.2

2004-5 생명보험가입자의 사망원인 분석 및 시사점 / 생명보험본부, 2004.3

2004-6 역모지기 (Reverse Mortgage) 시장전망 및 대응방안/생명보험본부, 2004.3

2004-7 자동차 보험 관련 법령 개정 동향 및 시사점 /자동차보험본부, 2004.4

2004-8 EU 지급여력제도 개선추세 및 시사점 / 생명보험본부, 2004.6

2004-9 퇴직연금시대 도래와 보험회사의 진입전략 / 보험연구소,2004.7

2004-10 자동차보험 관련 법령 개정 동향 및 시사점 / 자동차보험본부 2004.4

2004-11 손보사의 자연재해보험시장의 참여전략 /손해보험본부, 2004-9

2004-12 국제보험회계기준에 대한 해외보험사 CEO들의 인식과 시사점/보험연구소 2004.10

정기간행물

■ 월간

○ 보험통계월보

■ 계간

○ 보험동향

■ 계간

○ 보험개발연구

도서회원 가입안내

회원 및 제공자료

구분 내용	법인회원	특별회원	개인회원	연속간행물 구독회원
연회비	₩ 300,000원	₩ 150,000원	₩ 150,000원	간행물별로 다름
제공자료	-연구조사보고서 · 연구보고서(10~15회/년) · 조사연구자료(5~10회/년) · 정책연구자료(3~5회/년) · 기타 보고서 -연속간행물 · 보험개발연구(3-4회) · 보험동향(계간)		-연구조사보고서 · 연구보고서(10~15회/년) · 조사연구자료(5~10회/년) · 정책연구자료(3~5회/년) · 기타 보고서 -연속간행물 · 보험개발연구(3-4회) · 보험동향(계간)	- 간행물별 년간 구독료는 다음과 같음 · 보험개발연구 (연간 3회～4회 ₩ 30,000) · 보험통계월보 (월간 ₩ 50,000) · 보험동향 (계간 ₩ 20,000)
	-본원 주최 각종 세미나 및 공청회 자료 -보험통계월보 -영문발간자료		-	

※ 특별회원 가입대상 : 도서관 및 독서진흥법에 의하여 설립된 공공도서관 및 대학도서관

가입문의

보험개발원 도서회원 담당
전화 : 368-4230,4407 팩스 : 368-4099

회비납입방법

- 무통장입금 : 국민은행 (067-25-0014-382) / 한미은행 (110-55016-257)
  예금주 : 보험개발원
- 지로번호 : 6937009

가입절차

보험개발원 홈페이지(www.kidi.or.kr)의 Knowledge Center에서 도서회원가입신청서를 작성•등록 후 회비입금을 하시면 확인 후 1년간 회원자격이 주어집니다

자료구입처

서울 : 보험개발원 보험자료실, 교보문고, 종로서적, 영풍문고, 을지서적, 서울문고, 세종문고 부산 : 영광서적

저 자 약 력

김 석 영
University of Arizona, 수학 박사
현 보험개발원 보험연구소 선임연구원
(ausio2@kidi.or.kr)

연구조사자료 2005-1

금리 시나리오 생성모델 연구

발 행 일	2005년 3月 日
발 행 인	김 창 수
편 집 인	오 영 수
발 행 처	보 험 개 발 원
	서울특별시 영등포구 여의도동 35-4
대표전화	(02) 368-4000
인 쇄 소	신우 씨앤피
전 화	(02) 2267-4112

ISBN 89-5710-020-2 93320 정가10,000원