부록 : 자산 부족 확률 모형 도출

본문 (Ⅴ-5)식의 도출 과정은 다음과 같다.

$$prob[SPV > w] = \text{GammaDist}\left(\frac{2\mu + 4\lambda}{\sigma^2 + \lambda} - 1,\ \frac{\sigma^2 + \lambda}{2} \mid \frac{1}{w}\right) \tag{1}$$

$G(x \mid \alpha, \beta)$와 $G_R = (x \mid \alpha, \beta)$가 각각 감마(Gamma)와 역감마(Reciprocal Gamma)의 누적확률분포(CDF)라고 할 때 다음과 같은 관계가 성립한다.

$G_R(x \mid \alpha, \beta) = P(X \le x) = P(1/X > 1/x) = 1 - G(1/x \mid \alpha, \beta)$

따라서 부족 확률(probability of ruin)인 $G_R(1/w \mid \alpha, \beta)$는 Gamma함수의 CDF를 이용해서 구할 수 있다.

(1)식의 핵심은 사력 λ, 자산의 투자 수익률 μ, 투자 수익률의 변동성 σ와 최초 보유자산(w) 대비 인출수준인 $1/w$가 부족 확률인 $\Pr[SPV \ge w]$로 표현되는 것이다. 이를 도출하는 단계를 설명하면 다음과 같다.

투자자산 가치는 기하브라운운동(Geometric Brownian Motion) 모형을 가정한다.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,\ \ S_0 = 1 \tag{2}$$

확률차분식(SDE: stochastic differential equation)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_t := e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t} = e^{\nu t + \sigma B_t} \tag{3}$$

여기서, μ는 산술평균이며, ν는 기하평균을 의미한다.

최초 자산 w에서 매년 $1dt$씩 인출되며, 투자 포트폴리오의 동태성은 관련

된 SDE을 만족시킨다.

$$dW_t := dS_t - 1dt = (\mu W_t - 1)dt + \sigma W_t dB_t,\ \ W_0 = w \tag{4}$$

투자 포트폴리오 W_t는 t=0 시점에 $W_0 = w$ 값으로 시작하여 시간의 흐름에 따라 (4)와 같이 변동한다. 포트폴리오 과정의 표류(drift)항은 투자자산 자체의 표류항인 μS_t가 아니라 $\mu W_t - 1$이 된다. 투자자산 S_t는 투자 수익률 μ > 0이므로 시간의 흐름에 따라 증가할 것으로 기대되지만, 퇴직 자산은 시간의 흐름에 따라 감소할 것이며 특히 $\mu W_t < 1$일 경우 더욱 그렇다. 이에 대한 SDE의 해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_t = e^{\nu t + \sigma B_t}[w - \int_0^t e^{-\nu t - \sigma B_t} dt],\ \ W_0 = w \tag{5}$$

(3)에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_t = S_t [w - \int_0^t S_t^{-1} dt],\ \ W_0 = w \tag{6}$$

퇴직 이후의 부족 확률을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi(w) := \Pr[\inf_{0 \le s < T} W_s \le 0 \mid W_0 = w] \tag{7}$$

(7)의 확률은 확률변수인 기대여명 T 이전에 확률과정 W_t의 값이 0 이하가 되는 가장 작은 값을 의미한다. $\phi(w)$ 함수는 최초의 퇴직 자산 w 또는 인출수준 $1/w$의 함수이며, 장래여명 T를 결정하는 사망률뿐만 아니라 포트폴리오 파라미터인 μ, ν, σ의 함수이다.

(7)식이 확률적 현재가치(SPV: stochastic present value) 함수가 w보다 클

확률로 표현될 수 있음을 보이면 된다. (6)식에서 0의 값을 가질 확률에 대해 고려해 보면, W_t는 두 부문의 곱으로 구성되는데, 첫 번째 부분인 S_t는 브라운운동의 지수함수이므로 負의 값을 가질 수 없기 때문에 두 번째 부분이 0이 될 경우에만 W_t가 0이 될 수 있다. 괄호 안의 값은 0 시점에 w 값으로 시작하며, 적분 항인 $\int_0^t (S_t^{-1})dt$가 w 값으로 증가하는 경우에만 0의 값을 가질 수 있다. 이 적분은 단조증가하므로 일단 $\int_0^t (S_t^{-1})dt$가 w를 초과하면 w 이하로 되돌아가지 않을 것이기 때문에 퇴직 이후의 부족 확률을 S_t 항목으로 다시 쓸 수 있다.

$$\phi(w) := \Pr[\int_0^T e^{-\nu t - \sigma B_t} dt \geq w] \tag{8}$$

(8)식이 확률적 현재가치(SPV)를 의미하며, 퇴직 이후의 부족 확률은 SPV가 최초의 퇴직 자산(w)보다 크거나 같을 확률과 동일하다. 따라서, 적분항목에 대한 적절한 확률분포를 찾는 문제로 귀착된다.

$$X_T := \int_0^T e^{-\nu t - \sigma B_t} dt \tag{9}$$

여기서 퇴직 이후의 부족 확률은 다음과 같다.

$$\phi(w) = 1 - \Pr[X_T < w] \tag{10}$$

$T < \infty$일 경우에는 X_T에 대한 명시적인 분포함수를 구할 수 없지만, moment matching 기법을 사용하여 근사한 분포를 알아낼 수 있다. 적률을 구하기 위해 매개변수(intermediate variables)를 정의하자 : $\nu = \nu_0 = \mu - \sigma^2/2$, $\nu_1 = \mu - \sigma^2$, $\nu_2 = \mu - 3\sigma^2/2$, $\nu_3 = \mu - 2\sigma^2$; 이는

$\nu_0 \geq \nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$임을 의미한다. 가장 제한적인 경우가 $\nu_3 > 0$로서 기대수익률 μ가 변동성 σ보다 상당히 큰 값을 의미하는데, 이는 (9)와 같이 정의된 SPV 적분 값이 수렴하기 위해 요구된다. 적률을 계산하기 위해 적분을 바꾸고 기댓값을 취하면 SPV의 1계 적률은 다음과 같다.

$$M_t^{(1)} := E[X_t] = \int_0^t e^{-\nu_1 s}\, ds = \frac{1 - e^{-\nu_1 t}}{\nu_1} \tag{11}$$

SPV의 2계 적률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_t^{(2)} &:= E[X_t^2] \\ &= \frac{2}{\nu_3} \int_0^t (e^{-\nu_1 s} - e^{-2\nu_2 s})ds \\ &= \frac{2}{\nu_3}\left(\frac{1 - e^{-\nu_1 t}}{\nu_1} - \frac{1 - e^{-2\nu_2 t}}{2\nu_2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

$M_t^{(1)}$과 $M_t^{(2)}$는 t까지 적분하는 것을 의미한다. 장래여명이 확률변수인 t=T일 경우의 적률을 고려하면, $t \to \infty$이고, SPV가 무한일 경우 1계 및 2계 적률은 $M_\infty^{(1)} = (\nu_1)^{-1}$과 $M_\infty^{(2)} = (\nu_1 \nu_2)^{-1}$로 수렴한다. 이를 원래 파라미터 μ, σ로 표시하면 $M_\infty^{(1)} = (\mu - \sigma^2)^{-1}$과 $M_\infty^{(2)} = ((\mu - \sigma^2)(\mu - 3\sigma^2/2))^{-1}$가 된다.

사망률이 지수함수일 경우 즉, $\Pr[T > t] = e^{-\lambda t}$일 때 관련 적률은 다음과 같다.

$$M_\lambda^{(1)} := E[X_\lambda] = \int_0^\infty e^{-(\nu_1 + \lambda)s}\, ds = \frac{1}{\nu_1 + \lambda} \tag{13}$$

$$M_\lambda^{(2)} := E[X_\lambda^2] = \frac{2}{\nu_3}\int_0^\infty (e^{-(\nu_1+\lambda)s} - e^{-(2\nu_2+\lambda)s})ds \tag{14}$$

$$= \frac{2}{\nu_3}(\frac{1}{\nu_1+\lambda} - \frac{1}{2\nu_2+\lambda})$$

$$= \frac{2}{(\nu_1+\lambda)(2\nu_2+\lambda)}$$

$2\nu_2 - \nu_1 = \nu_3$이므로, 원래 파라미터 μ와 σ를 ν_1과 ν_2 대신 대입하면 다음과 같다.

$$M_\lambda^{(1)} = \frac{1}{\mu+\lambda-\sigma^2} = \frac{1}{\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}^2} \tag{15}$$

$$M_\lambda^{(2)} = \frac{2}{(\mu+\lambda-\sigma^2)(2\mu-3\sigma^2+\lambda)} = \frac{2}{(\tilde{\mu}-\tilde{\sigma}^2)(2\tilde{\mu}-3\tilde{\sigma}^2)} \tag{16}$$

여기서 $\tilde{\mu} := \mu + 2\lambda$이고, $\tilde{\sigma}^2 := \sigma^2 + \lambda$이다.

SPV를 근사하는 분포로서 역감마(RG: Reciprocal Gamma)분포를 선택하고, 모수 α, β에 대해 이들 적률을 대응시켜 보자. 근사치로서 RG분포를 선택한 이유는 X_∞ 분포가 역감마분포로 수렴하기 때문이다(Dufresne, 1990; Milevsky, 1997).

확률변수가 모수 α, β를 갖는 RG분포를 따를 경우 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\Pr[X < x] := \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(a)}\int_0^x y^{-(\alpha+1)} e^{(-1/y\beta)} dy \tag{17}$$

RG분포의 평균 또는 1차 적률은 $E[X] = (\beta(\alpha-1))^{-1}$이고, 2차 적률은 $E[X^2] = (\beta^2(\alpha-1)(\alpha-2))^{-1}$이다.

$$M^{(1)} = \frac{1}{\beta(\alpha-1)}, \quad M^{(2)} = \frac{1}{\beta^2(\alpha-1)(\alpha-2)} \tag{18}$$

2차 적률이 존재할 조건은 $\alpha > 2$이고, 식 (18)은 모수 α, β와 적률 $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ 간 1 대 1 관계가 성립하므로 α, β를 적률항으로 전환시킬 수 있다.

$$\alpha = \frac{2M^{(2)} - M^{(1)}M^{(1)}}{M^{(2)} - M^{(1)}M^{(1)}}, \ \beta = \frac{M^{(2)} - M^{(1)}M^{(1)}}{M^{(2)}M^{(1)}} \tag{19}$$

SPV의 1차 및 2차 적률을 알고 있기 때문에 적률들을 풀면, 대응하는 근사식(moment matching approximation)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}[X_\lambda \le w] &= RG(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \mid w) \\ &\coloneqq 1 - \frac{\tilde{\beta}^{-\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \int_0^w x^{-(\tilde{\alpha}+1)} e^{-(1/x\tilde{\beta})} dx \end{aligned} \tag{20}$$

여기서, $\tilde{\alpha} = 2\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}^2 - 1$, $\tilde{\beta} = \tilde{\sigma}^2/2$이다.