[부록]

Ⅰ. 금리모형에 사용되는 주요 정리들

1. Weierstrass' Approximation Theorem

정리 : 닫힌 구간(compact set) $[a, b]$ 위에 실변수 연속함수 f 가 주어졌을 때 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대해서 어떤 다항식 함수 $p(x)$가 항상 존재하여 다음을 만족한다.

$$[a, b] \text{ 위의 모든 점 } x \text{ 에서 } |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

Weierstrass's Approximation Theorem의 의해서 어떤 닫힌구간 안에서 연속인 함수가 주어지면 항상 근사함수를 구할 수 있다. 그러므로 복잡한 함수가 주어 졌어 다루기가 힘들 때 이 Weierstrass's Approximation Theorem에 의해서 간단한 다항함수로 대체할 수 있다.

2. Girsanov's Theorem

정리 : 확률측도 P 에 대해 $\overline{W_t}$를 P 브라운 운동이라고 하고 γ_t는 $E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2\, dt\,)]$이 유한하게 되는 process 라고 하자. 그러면 다음을 만족하는 확률 측도 Q 가 존재한다,

(i) 확률측도 Q 와 확률측도 P 는 equivalent[19] 하다.

(ii) $\frac{dQ}{dP} = \exp(-\int_0^T \gamma_t\, d\overline{W_t} - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2\, dt\,)$

(iii) $W_t = \overline{W_t} + \int_0^t \gamma_s\, ds$이 확률측도 Q 에 대한 브라운 운동이 된다.

Girsanov 정리의 역정리 : $\overline{W}$ 가 P-브라운 운동이고 확률측도 Q가 P 와 equivalent 하다면

---

19) measure P 와 measure Q가 equivalent 하다는 것은 P(A) = 0 가 되는 모든 집합 A에 대해서 Q(A) = 0 이 성립한다는 것이다.

$$W_t = W_t + \int_0^t \gamma_s \, ds$$

가 Q-브라운 운동이 되는 process γ_t 가 존재한다.

3. Ito's formula

가. Ito's isometry Theorem

함수 $\Phi(t, \omega) \in L^2(0, T)$ 가 주어지면 다음이 성립한다

$$E[\,(\int_0^T \Phi(t, \omega)\, dW(t, \omega))^2] = E[\int_0^T \Phi(t, \omega)^2 dt]$$

나. Ito's Lemma

변수 x가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 가정하자.

$$d\,x = a(x,t)\,d\,t + b(x,t)\,d\,z \qquad (\text{I} - 1)$$

여기서 dz는 위너과정(Wiener process)이고 a 와 b는 변수 x, t의 함수이다. 그러면 변수 x, t의 함수 G는 다음을 만족한다.

$$d\,G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\,b\,d\,z \qquad (\text{I} - 2)$$

여기서 dz는 (Ⅱ - 1)에 있는 것과 같은 위너과정(Wiener process)이다.

4. 채권가격에 대한 미분방정식

정리 : 주어진 측도 $\mathbb{P}$와 $\mathbb{P}$-브라운 운동 $\overline{W}(t)$ 을 사용해 나타낸 다음과 같은 one factor short rate 모델을 생각하자.

$$dr(t) = \overline{\mu}(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\overline{W}(t) \qquad (\text{I} - 3)$$

채권 시장에 arbitrage 가 없다면 만기 T 의 채권가격 $P(t, T)$ 는 다음과 같은 미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\bar{\mu} - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

$$P(T, T) = 1$$

여기서 λ는 market price of risk 를 나타낸다.

증명 : 채권 가격에 대한 process $P(t, T)$ 에 대해 Ito formula를 적용시키자.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(dr)^2 \qquad (\text{I - 4})$$

여기에 (식 I-3)의 dr 을 대입하자. Ito-formula 에 의해서

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot d\overline{W}(t) = 0, \quad d\overline{W}(t) \cdot d\overline{W}(t) = dt$$

$$(dr)^2 = \sigma^2 dt$$

가 된다. 따라서 (I - 4)는 다음과 같이 정리된다.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}(\bar{\mu}\,dt + \sigma\, d\overline{W}(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 dt$$

$$= (\frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2)dt + \sigma\frac{\partial P}{\partial r}d\overline{W}(t)$$

이것을 채권의 확률 미분방정식

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = m(t, T)\,dt + v(t, T)\,d\overline{W}(t)$$

과 비교하면

$$m = \frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2), \qquad v = \frac{1}{P}\sigma\frac{\partial P}{\partial r}$$

이다. 채권시장에 arbitrage 가 없다고 가정한다면 확률측도 P 에 대해 모든 만기의 채권은 같은 market price of risk $\lambda(t)$

$$\frac{m(t, T) - r(t)}{v(t, T)} = \lambda(t)$$

를 갖는다.

market price of risk $\lambda(t)$의 식에 m 과 v의 값을 대입하여 다시 정리하면

$$\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial t} + \bar{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2) - r = \lambda(t)\frac{1}{P}\sigma\frac{\partial P}{\partial r}$$

가 된다.

$P(T, T) = 1$ 는 당연한 사실이므로 증명이 끝난다.

■

위의 정리는 확률측도 $\mathbb{P}$에 관해서 성립하는 것이다. 확률측도 $\mathbb{Q}$에 관해서 살펴보면 다음과 같은 정리를 가진다.

정리 : 마팅게일 확률측도 Q와 Q-브라운 운동 $W(t)$을 사용해 나타낸 다음과 같은 one factor short rate 모델을 생각하자.

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\overline{W}(t)$$

채권시장에 arbitrage가 없다면 만기 T 의 채권가격 $P(t, T)$는 다음과 같은 편미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$
$$P(T, T) = 1$$